Cognome e nome .... **N. matricola** ....
Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:
◯ 18–19 febbraio ◯ 21–22 febbraio ◯ 27 febbraio – 1 marzo ◯ in un appello successivo.

Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi,** motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di strumenti elettronici di calcolo, appunti, libri di esercizi. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Studiare la funzione

$$f(x) = e^{-|x|}(x^2 - 2x + 2)\,,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo della funzione.

---

2. Calcolare l'area della regione piana

$$E = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \geq 0\,,\ \ln(3+x^2) \leq y \leq \ln(5+x)\Big\}\,.$$

---

3. Risolvere ciascuna delle seguenti equazioni e disegnarne le soluzioni nel piano complesso

$$-4(z-i)^4 = (iz)^4\ , \qquad 2(\operatorname{Im} w)^3 = \operatorname{Im}(w^3)\ .$$

---

4. Calcolare l'ordine di infinito/infinitesimo delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x^3}\right)^x - 1 \quad (\text{per } x \to +\infty)\,, \qquad g(x) = x^2 - \sin(x^2 + x^\alpha) \quad (\text{per } x \to 0^+, \text{al variare di } \alpha > 0)\,.$$

---

5. Al variare del parametro $\alpha > 0$, studiare la convergenza (semplice e assoluta) della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \Big(\ln(n^{3\alpha} + n) - \ln(n^{3\alpha} + 1)\Big)\,.$$

Punteggi: 1: 8 punti; **2:** 7 punti; **3:** 7 punti; **4:** 7 punti; **5:** 6 punti. Per essere ammessi alla prova di teoria occorrono 15 punti. Valgono anche punteggi parziali.

1. Studiare la funzione

$$f(x) = e^{-|x|}(x^2 - 2x + 2)\,,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo della funzione.

Dominio: $\mathbb{R}$. f è positiva nel suo dominio. f è continua nel suo dominio.

Limiti significativi: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. $y=0$ è asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$.

Derivabilità: f è derivabile per $x \neq 0$. Si ha:

$$f'(x) = \begin{cases} e^x x^2 & x<0 \\ -e^{-x}(x-2)^2 & x>0 \end{cases}$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} (x^2 e^{-x}) = 0$$

$$f'_+(0) = -\lim_{x\to 0^+} e^x (x-2)^2 = -4$$

Pertanto $x=0$ è p.to angoloso.

$f'(x) = 0 \iff x = 2$ p.to di flesso a tg. orizzontale

$f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, 0)$

$f'(x) < 0 \iff x \in (0,2) \cup (2,+\infty)$

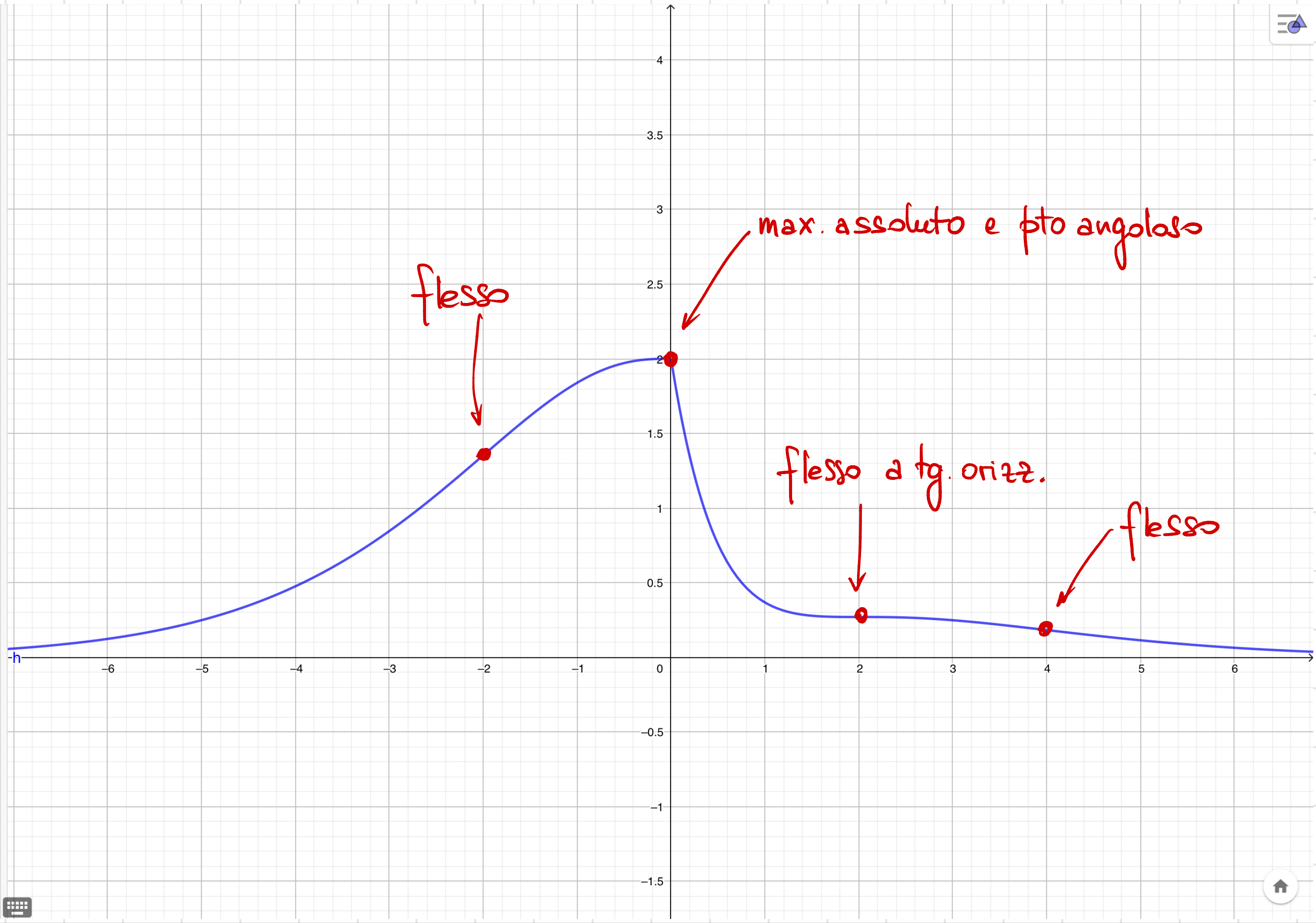
f è strettamente crescente in $(-\infty, 0]$,
strettamente decrescente in $[0,+\infty)$.

$x=0$ è p.to di massimo assoluto (non regolare).

$$f''(x) = \begin{cases} e^x\, x(x+2) & \text{se } x<0 \\ e^{-x}(x-2)(x-4) & \text{se } x>0 \end{cases}$$

f è strettamente convessa in $(-\infty,-2]$, in $[0,2]$ e in $[4,+\infty)$, strettamente concava in $[-2,0]$ e in $[2,4]$.

I punti $x=-2$, $x=2$ e $x=4$ sono pti di flesso.



2. Calcolare l'area della regione piana

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0\,,\ \ln(3+x^2) \leq y \leq \ln(5+x) \right\}.$$

Si ha $\ln(3+x^2) \leq \ln(5+x)$ per $x \in [-1,2]$,

quindi

$$\text{Area } E = \int_0^2 \left(\ln(5+x) - \ln(3+x^2)\right) dx.$$

$$\int_0^2 \ln(5+x)\,dx \underset{\text{[per parti]}}{=} x\ln(5+x)\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{x}{5+x}\,dx =$$

$$= 2\ln 7 - \int_0^2 \left(1 - \frac{5}{5+x}\right) dx =$$

$$= 2\ln 7 - 2 + 5\ln(5+x)\Big|_0^2 =$$

$$= 2\ln 7 - 2 + 5\ln\frac{7}{5}$$

$$\int_0^2 \ln(3+x^2)\,dx \underset{\text{[per parti]}}{=} x\ln(3+x^2)\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{2x^2}{3+x^2}\,dx =$$

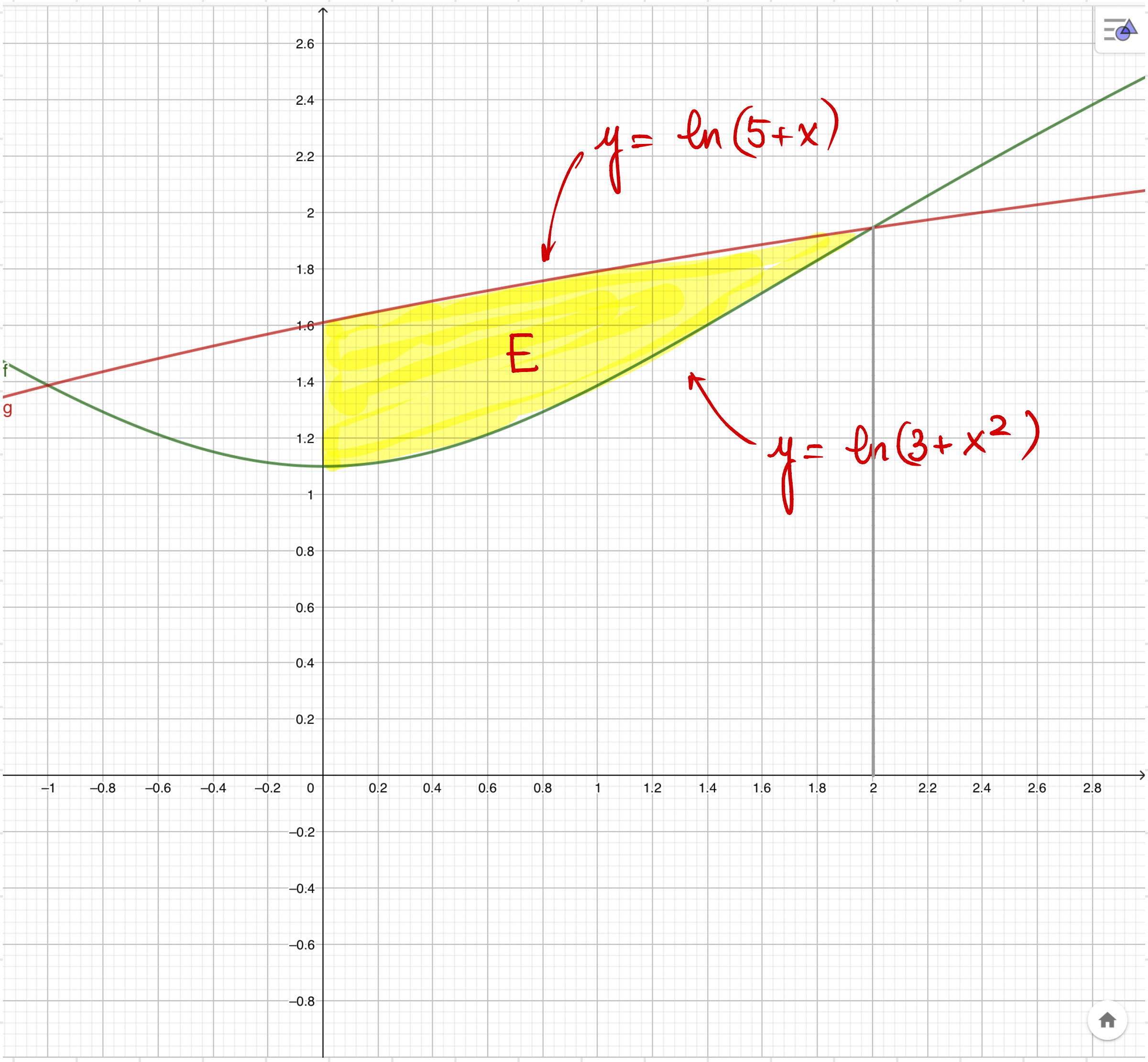
$$= 2\ln 7 - \int_0^2 \left(2 - \frac{6}{3+x^2}\right) dx =$$

$$= 2\ln 7 - 4 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\Big|_0^2 = 2\ln 7 - 4 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

Pertanto

$$\text{Area } E = 2 + 5 \ln\left(\frac{7}{5}\right) - 2\sqrt{3}\, \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

[verificato con Mathematica]



3. Risolvere ciascuna delle seguenti equazioni e disegnarne le soluzioni nel piano complesso

$$-4(z-i)^4 = (iz)^4\ , \qquad 2(\operatorname{Im} w)^3 = \operatorname{Im}(w^3)\ .$$

1) Dopo aver osservato che $z = i$ non è soluzione, basta porre $\dfrac{iz}{z-i} = v$ e l'eq^{ne} diventa

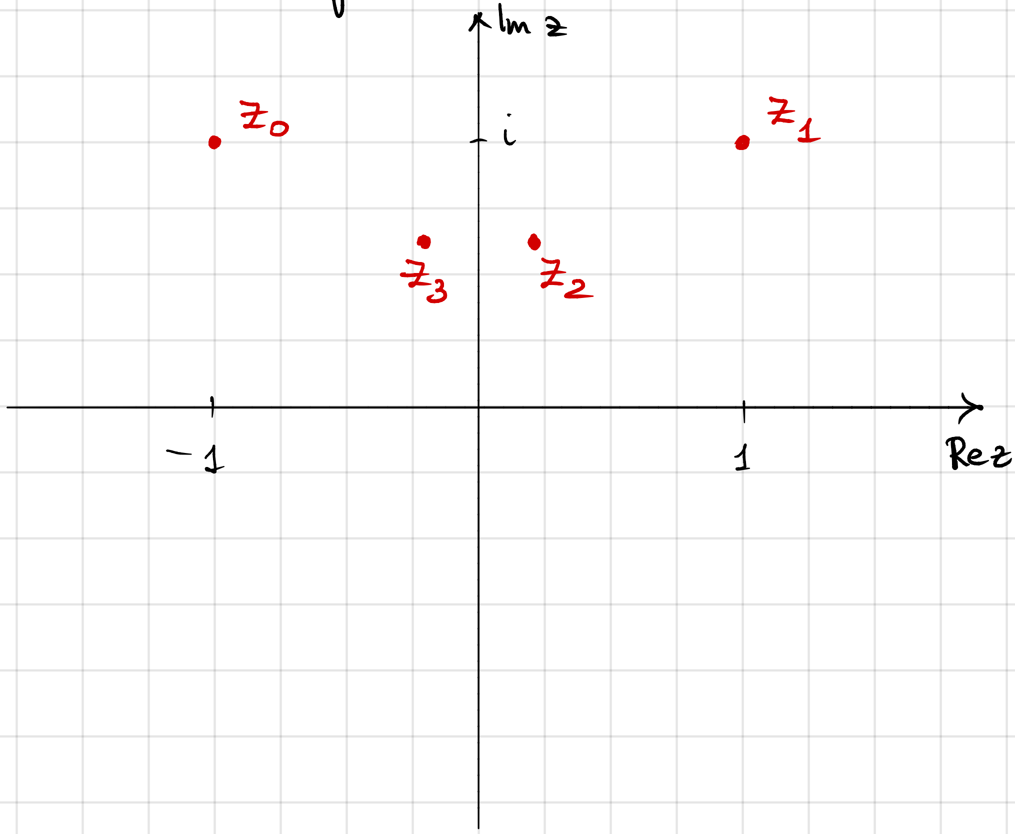
$$v^4 = -4 = 4e^{i\pi}$$

Quindi v ha 4 valori

$$v_0 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4} = 1+i$$
$$v_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}} = -1+i$$
$$v_2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}} = -1-i$$
$$v_3 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{4}} = 1-i$$

Poiché $z = \dfrac{iv}{v-i}$, si ottengono le soluzioni

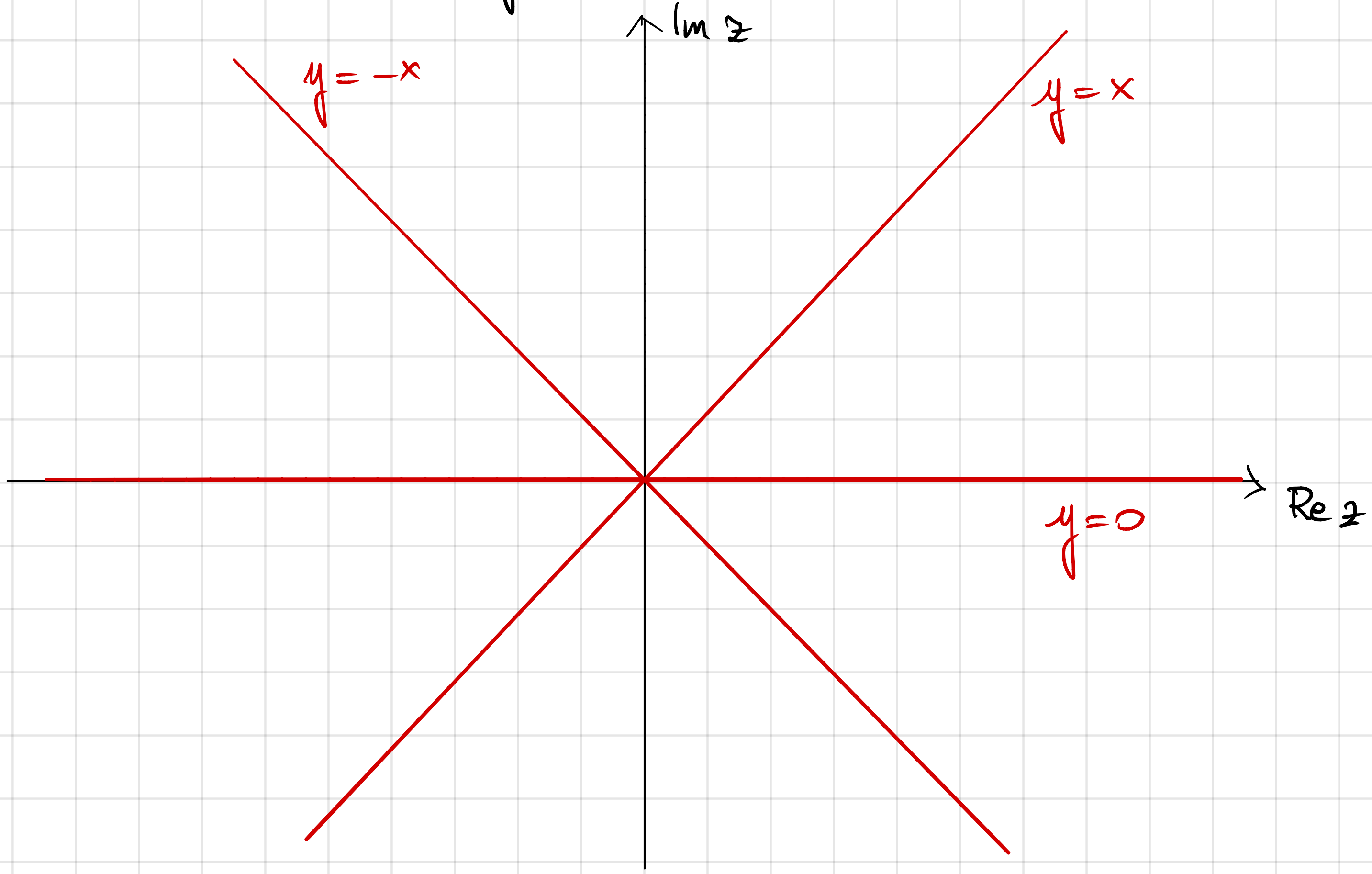
$$z_0 = -1+i$$
$$z_1 = 1+i$$
$$z_2 = \frac{1+3i}{5}$$
$$z_3 = \frac{-1+3i}{5}$$



2) Posto $w = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$, l'eq^{ne} diventa:

$$2y^3 = 3x^2y - y^3, \quad \text{cioè} \quad y(y+x)(y-x) = 0$$

Le soluzioni sono tutti i pti delle rette $y=0$ (cioè i numeri reali), $y = \pm x$.



4. Calcolare l'ordine di infinito/infinitesimo delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x^3}\right)^x - 1 \quad (\text{per } x \to +\infty), \qquad g(x) = x^2 - \sin(x^2 + x^\alpha) \quad (\text{per } x \to 0^+, \text{al variare di } \alpha > 0).$$

1) $\left(1 - \frac{1}{x^3}\right)^x - 1 = e^{x \ln\left(1 - \frac{1}{x^3}\right)} - 1 = (*)$

<u>OSS</u> $x \ln\left(1 - \frac{1}{x^3}\right) \sim -\frac{x}{x^3} = -\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \to +\infty} 0$, quindi

$(*) \sim x \ln\left(1 - \frac{1}{x^3}\right) \sim -\frac{1}{x^2}$

$\Rightarrow f(x)$ è un infinitesimo di ordine 2 per $x \to +\infty$

2) Poiché $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$ per $t \to 0$, si ha

$$g(x) = \cancel{x^2} - (\cancel{x^2} + x^\alpha) + \frac{(x^2 + x^\alpha)^3}{6} + o\left((x^2 + x^\alpha)^3\right)$$

$$= -x^\alpha + \frac{x^6 + 3x^{4+\alpha} + 3x^{2+2\alpha} + x^{3\alpha}}{6} + \underbrace{o\left((x^2 + x^\alpha)^3\right)}_{= \begin{cases} o(x^6) & \text{se } \alpha \geq 2 \\ o(x^{3\alpha}) & \text{se } 0 < \alpha < 2 \end{cases}}$$

Quindi:

- se $0 < \alpha < 6$, si ha $g(x) = -x^\alpha + o(x^\alpha) \sim x^\alpha$
- se $\alpha = 6$, $g(x) = -\frac{5}{6}x^6 + o(x^6) \sim -\frac{5}{6}x^6$
- se $\alpha > 6$, $g(x) = \frac{x^6}{6} + o(x^6) \sim \frac{x^6}{6}$

Quindi $g(x)$ è un infinitesimo di ordine

$\beta = \min\{\alpha, 6\}$ per $x \to 0^+$.

Nel caso $\alpha < 2$ si poteva anche risolvere con i limiti notevoli.

5. Al variare del parametro $\alpha > 0$, studiare la convergenza (semplice e assoluta) della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \Big(\ln(n^{3\alpha} + n) - \ln(n^{3\alpha} + 1) \Big) .$$

Poniamo $b_n = \ln(n^{3\alpha}+n) - \ln(n^{3\alpha}+1) = \ln\left(\frac{n^{3\alpha}+n}{n^{3\alpha}+1}\right)$

Se $\alpha < 1/3$, allora $b_n \longrightarrow +\infty$

quindi il termine della serie non è infinitesimo $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ la serie non converge.

Se $\alpha = \frac{1}{3}$, allora $\ln\left(\frac{2n}{n+1}\right) \longrightarrow \ln 2 \neq 0$

quindi anche in questo caso la serie non converge.

Se $\alpha > \frac{1}{3}$, allora

$$b_n = \ln\left(1 + \frac{n-1}{n^{3\alpha}+1}\right) \sim \frac{n-1}{n^{3\alpha}+1} \sim \frac{1}{n^{3\alpha-1}}$$

Quindi, per $\alpha > 1/3$

$|(-1)^n b_n| \sim \frac{1}{n^{3\alpha-1}}$ La serie converge assolutamente

(e quindi semplicemente) se e solo se $3\alpha - 1 > 1$, cioè $\alpha > \frac{2}{3}$.

Il caso $\frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{2}{3}$ si può studiare con il criterio di Leibniz. Osservato che b_n è definitivamente positivo dobbiamo controllare che la serie verifichi le ipotesi del criterio di Leibniz.

1) $b_n \to 0$ vero se $\alpha > \frac{1}{3}$

2) b_n definitivamente decrescente.

Questo equivale a dire che

$1 + \frac{n-1}{n^{3\alpha}+1}$ sia definitivamente decrescente.

cioè che $\frac{n-1}{n^{3\alpha}+1}$ sia def^{te} decrescente.

Posto $f(x) = \frac{x-1}{x^{3\alpha}+1}$, si ha

$$f'(x) = \frac{x^{3\alpha}+1-3\alpha(x-1)x^{3\alpha-1}}{(x^{3\alpha}+1)^2} = \frac{\overbrace{(1-3\alpha)x^{3\alpha}+3\alpha x^{3\alpha-1}+1}^{\sim (1-3\alpha)x^{3\alpha} < 0 \text{ per } x \to +\infty}}{\underbrace{(x^{3\alpha}+1)^2}_{>0}}$$

Quindi $f'(x) < 0$ def^{te} per $x \to +\infty$. Le ipotesi del criterio di Leibniz sono verificate.

In definitiva:

La serie converge assolutamente se e solo se $\alpha > \frac{2}{3}$

La serie converge semplicemente se e solo se $\alpha > \frac{1}{3}$.