Cognome e nome .... **N. matricola** ....
Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:
◯ 16–18 gennaio ◯ 22–25 gennaio ◯ 29 gennaio–1 febbraio ◯ in un appello successivo.

Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi,** motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di strumenti elettronici di calcolo, appunti, libri di esercizi. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Studiare le funzioni

$$f(x) = (2-x^2)^{-1/3}x^2\,, \qquad g(x) = |2-x^2|^{-1/3}x^2\,,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo delle due funzioni.

---

2. Per $n \in \mathbb{N}$, sia

$$I_n = \int_0^1 e^{x/2} \sin^n(\pi x)\, dx\,.$$

a) Trovare una formula iterativa che esprima I_n in funzione di I_{n-2} (per $n \geq 2$);
b) Usare la formula trovata al punto a) per calcolare I_4.

---

3. Risolvere ciascuna delle seguenti equazioni e disegnarne le soluzioni nel piano complesso

$$z^8 + (2+\sqrt{3}i)z^4 + 1 + \sqrt{3}i = 0\,, \qquad (\overline{w})^3|w|^4 = -27w^4\,.$$

---

4. Calcolare l'ordine di infinito/infinitesimo delle seguenti funzioni:

$$f(x) = e^{1/x} - \cos\frac{x-5}{x^2} \quad (\text{per } x \to +\infty)\,, \qquad g(x) = \sqrt[3]{1-2\,\mathrm{tg}\,x} - \sqrt[3]{1-2x} \quad (\text{per } x \to 0^+)\,,$$

---

5. Al variare dei parametri reali α, x, studiare la convergenza di ciascuna delle serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\alpha}{n+2} - \ln\left(1+\frac{3}{n+2}\right)\right)\,, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{(n^4+3)(2^n-n)}(4-x^2)^n\,.$$

Punteggi: 1: 8 punti; **2:** 7 punti; **3:** 7 punti; **4:** 6 punti; **5:** 7 punti. Per essere ammessi alla prova di teoria occorrono 15 punti. Valgono anche punteggi parziali.

1. Studiare le funzioni

$$f(x) = (2-x^2)^{-1/3}x^2\,, \qquad g(x) = |2-x^2|^{-1/3}x^2\,,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo delle due funzioni.

Dominio: $x \neq \pm\sqrt{2}$. f è pari $\Rightarrow$ basta studiarla per $x \geq 0$.

$f(x) = 0 \iff x = 0$

$f(x) < 0 \iff x > \sqrt{2}$

$f(x) > 0 \iff 0 < x < \sqrt{2}$.

f è di classe C^∞ nel suo dominio, quindi continua.

$$\lim_{x \to (\sqrt{2})^\pm} f(x) = \mp\infty \qquad x = \sqrt{2} \text{ asintoto verticale}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty\,, \quad f \text{ non ammette asintoti obliqui.}$$

$$f'(x) = \frac{4}{3}(2-x^2)^{-4/3}(3x - x^3)$$

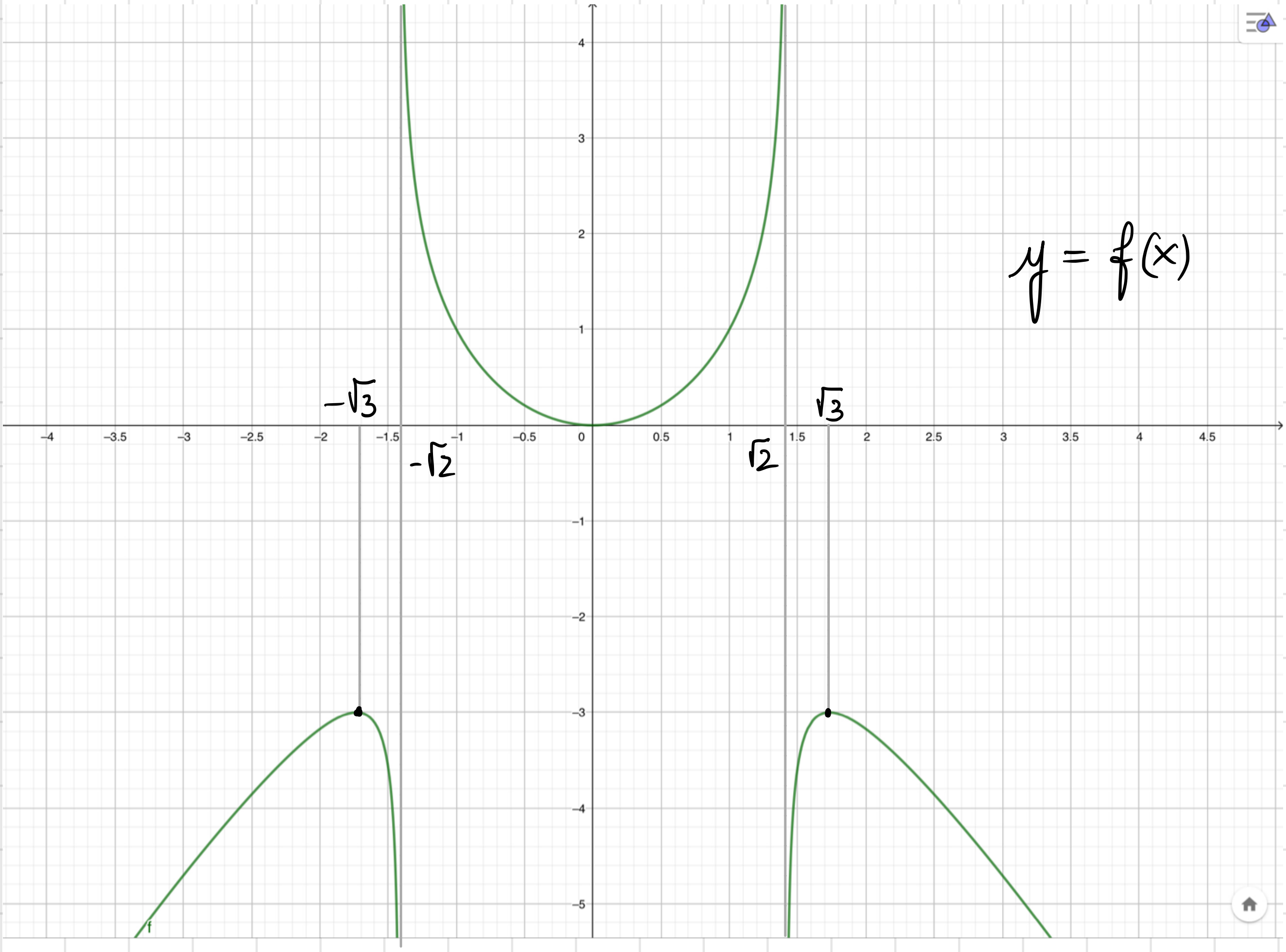
f strettamente decrescente in $[\sqrt{3}, +\infty)$

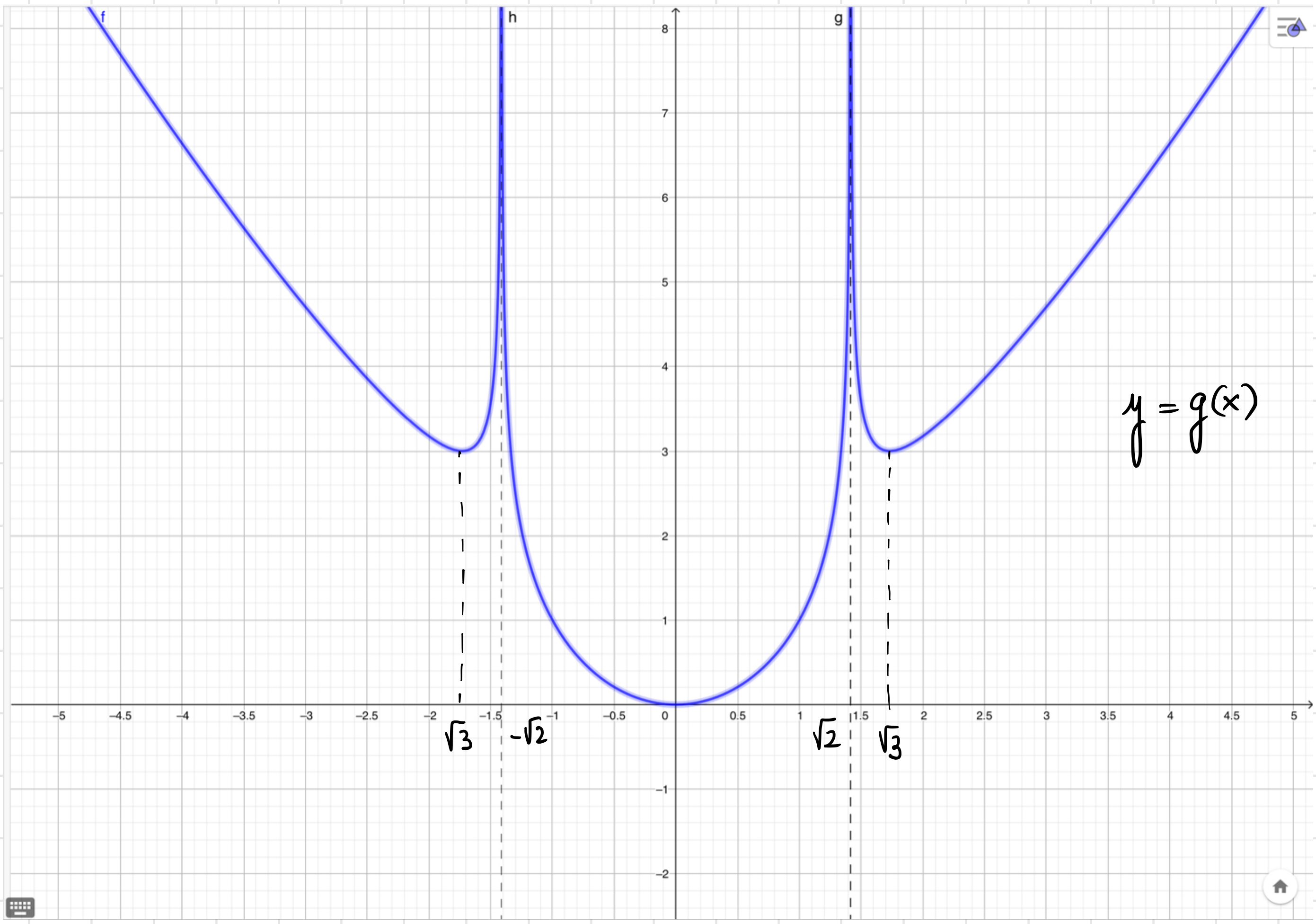
f strett. crescente in $[0, \sqrt{2})$ e in $(\sqrt{2}, \sqrt{3}]$

$x = 0$ pto di min. relativo, $x = \sqrt{3}$ pto di max. relativo

$$f''(x) = \frac{4}{9}(2-x^2)^{-7/3}\underbrace{(x^4 - 3x^2 + 18)}_{\text{sempre} > 0}$$

f strettamente convessa in $[0, \sqrt{2})$, strett. concava in $(\sqrt{2}, +\infty)$.
Niente flessi. Il grafico è il seguente:





Il grafico di $g(x)$ è semplicemente ottenuto "ribaltando" il grafico di f per $|x| > \sqrt{2}$.

2. Per $n \in \mathbb{N}$, sia

$$I_n = \int_0^1 e^{x/2} \sin^n(\pi x)\, dx\,.$$

a) Trovare una formula iterativa che esprima I_n in funzione di I_{n-2} (per $n \geq 2$);
b) Usare la formula trovata al punto a) per calcolare I_4.

Integriamo per parti due volte:

$$I_n = \int_0^1 e^{x/2} \sin^n(\pi x)\, dx =$$

$$= \underbrace{2 e^{x/2} \sin^n(\pi x)\Big|_0^1}_{=0} - 2n\pi \int_0^1 e^{x/2} \sin^{n-1}(\pi x) \cos(\pi x)\, dx =$$

$$= \underbrace{-4n\pi\, e^{x/2} \sin^{n-1}(\pi x) \cos(\pi x)\Big|_0^1}_{=0} +$$

$$+ 4n(n-1)\pi^2 \int_0^1 e^{x/2} \sin^{n-2}(\pi x) \underbrace{\cos^2(\pi x)}_{=1-\sin^2(\pi x)}\, dx +$$

$$- 4n\pi^2 \int_0^1 e^{x/2} \sin^n(\pi x)\, dx =$$

$$= 4n(n-1)\pi^2 (I_{n-2} - I_n) - 4n\pi^2 I_n =$$

$$= 4n(n-1)\pi^2 I_{n-2} - 4\pi^2 n^2 I_n.$$

$$\Longrightarrow \boxed{I_n = \frac{4n(n-1)\pi^2}{1 + 4\pi^2 n^2} I_{n-2}}$$

$$\Longrightarrow I_4 = \frac{48\pi^2}{1 + 64\pi^2} I_2 = \frac{384\,\pi^2}{(1+64\pi^2)(1+16\pi^2)} I_0$$

e, poiché $I_0 = \int_0^1 e^{x/2}\,dx = 2(\sqrt{e}-1)$

$$\Longrightarrow \boxed{I_4 = \frac{768\pi^4(\sqrt{e}-1)}{(1+64\pi^2)(1+16\pi^2)}}$$

(verificata con Wolfram)

3. Risolvere ciascuna delle seguenti equazioni e disegnarne le soluzioni nel piano complesso

$$z^8 + (2+\sqrt{3}i)z^4 + 1 + \sqrt{3}i = 0\,, \qquad (\overline{w})^3|w|^4 = -27w^4\,.$$

a) Ponendo $z^4 = v$, si ottiene l'eq^ne di 2° grado

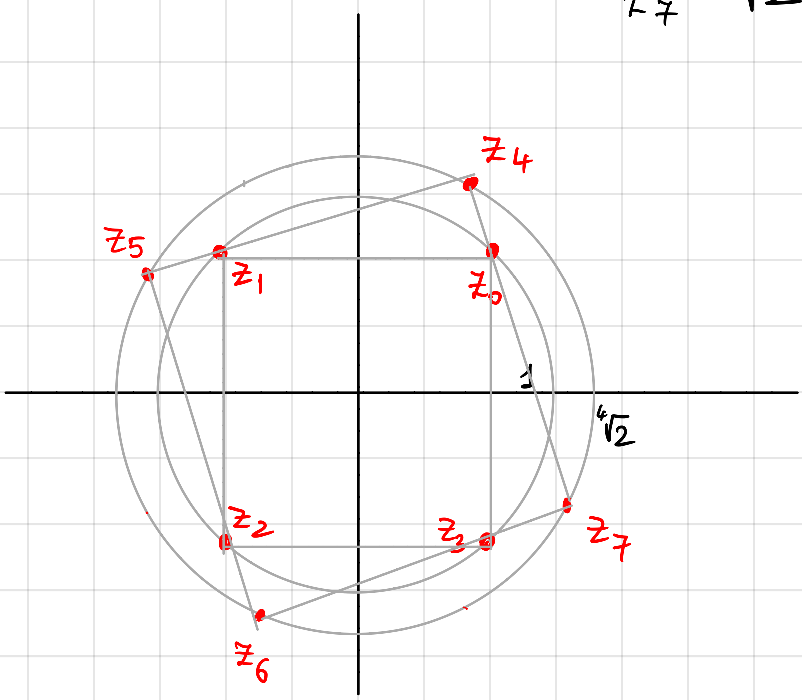
$$v^2 + (2+\sqrt{3}i)v + 1+\sqrt{3}i = 0$$

che ha come radici $v = -1$ e $v = -1-\sqrt{3}i$

Quindi devo risolvere

$$z^4 = -1 = e^{i\pi} \to \begin{cases} z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \\ z_1 = e^{i\frac{3}{4}\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) \\ z_2 = e^{i\frac{5}{4}\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i) \\ z_3 = e^{i\frac{7}{4}\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) \end{cases}$$

$$z^4 = -1-\sqrt{3}i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} \to \begin{cases} z_4 = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{\pi}{3}} = 2^{-\frac{3}{4}}(1+\sqrt{3}i) \\ z_5 = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2^{-3/4}(-\sqrt{3}+i) \\ z_6 = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{4\pi}{3}} = 2^{-3/4}(-1-\sqrt{3}i) \\ z_7 = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{11}{6}\pi} = 2^{-3/4}(\sqrt{3}-i) \end{cases}$$



b) Posto $w = \rho e^{i\theta}$, l'eq^{ne} diventa:

$$\rho^7 e^{-i3\theta} = 27\rho^4 e^{i(4\theta+\pi)}$$

$\rho = 0 \Rightarrow w_7 = 0$

$$\begin{cases} \rho = 3 \\ \theta = \dfrac{\pi + 2k\pi}{7} \end{cases}$$

$w_0 = 3e^{i\frac{\pi}{7}}$

$w_1 = 3e^{i\frac{3}{7}\pi}$

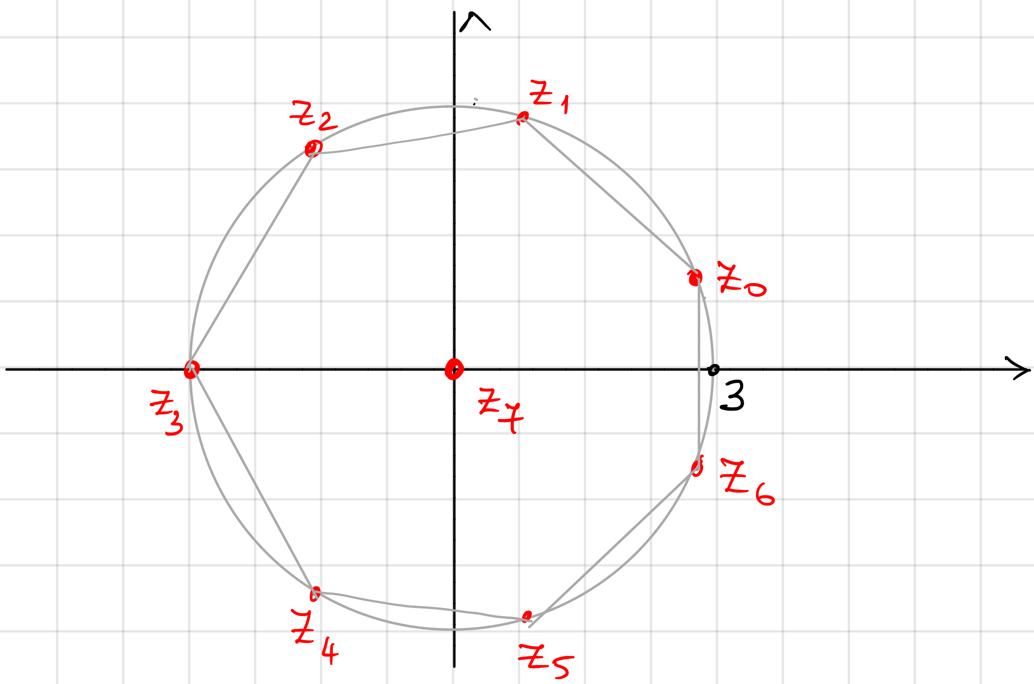
$w_2 = 3e^{i\frac{5}{7}\pi}$

$w_3 = 3e^{i\pi} = -3$

$w_4 = 3e^{i\frac{9}{7}\pi}$

$w_5 = 3e^{i\frac{11}{7}\pi}$

$w_6 = 3e^{i\frac{13}{7}\pi}$



4. Calcolare l'ordine di infinito/infinitesimo delle seguenti funzioni:

$$f(x) = e^{1/x} - \cos\frac{x-5}{x^2} \quad (\text{per } x \to +\infty), \qquad g(x) = \sqrt[3]{1 - 2\operatorname{tg} x} - \sqrt[3]{1-2x} \quad (\text{per } x \to 0^+),$$

$f(x)$ è un infinitesimo per $x \to +\infty$

$$f(x) = e^{1/x} - \cos\left(\frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}\right) = \left[\frac{1}{x} = t \to 0^+\right]$$

$$= e^t - 1 + 1 - \cos(t - 5t^2) =$$

$$= t\left(\underbrace{\frac{e^t - 1}{t}}_{\to 1} + \boxed{\frac{1 - \cos(t - 5t^2)}{t}}\right) \sim t = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1 - \cos(t - 5t^2)}{t} \sim \frac{(t - 5t^2)^2}{2t} \sim \frac{t}{2} \to 0$$

$\Rightarrow f(x)$ è un infinitesimo di ordine 1

$$g(x) = \sqrt[3]{1 - 2\operatorname{tg} x} - \sqrt[3]{1 - 2x} =$$

OSS si poteva anche usare lo sviluppo di Taylor di $\sqrt[3]{1+t}$

[moltiplicando e dividendo per $(1 - 2\operatorname{tg} x)^{2/3} + ((1 - 2\operatorname{tg} x)(1-2x))^{1/3} + (1-2x)^{2/3}$]

$$= \frac{\cancel{1} - 2\operatorname{tg} x - \cancel{1} + 2x}{\underbrace{(1 - 2\operatorname{tg} x)^{2/3} + ((1 - 2\operatorname{tg} x)(1-2x))^{1/3} + (1-2x)^{2/3}}_{\to 3}} \sim \frac{2}{3}(x - \operatorname{tg} x) =$$

$$= [\text{Taylor}] = \frac{2}{3}\left(x - \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)\right) \sim -\frac{2}{9}x^3 \quad \text{per } x \to 0$$

(infinitesimo di ordine 3).

5. Al variare dei parametri reali α, x, studiare la convergenza di ciascuna delle serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\alpha}{n+2}-\ln\left(1+\frac{3}{n+2}\right)\right), \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{(n^4+3)(2^n-n)}(4-x^2)^n .$$

a) $$\frac{\alpha}{n+2}-\ln\left(1+\frac{3}{n+2}\right) \underset{\text{[Taylor]}}{=} \frac{\alpha}{n+2}-\frac{3}{n+2}+\frac{9}{2(n+2)^2}+o\left(\frac{1}{(n+2)^2}\right)$$

$$\sim \begin{cases} \dfrac{\alpha-3}{n+2} \sim \dfrac{\alpha-3}{n} & \text{se } \alpha \neq 3 \\[2ex] \dfrac{9}{2(n+2)^2} \sim \dfrac{9}{2n^2} & \text{se } \alpha = 3 \end{cases}$$

Pertanto in ogni caso la serie è definitivamente a segno costante. Per il confronto con la serie armonica:

- diverge a $+\infty$ se $\alpha > 3$
- " a $-\infty$ se $\alpha < 3$
- converge se $\alpha = 3$.

b) Ponendo $4-x^2=t$, diventa una serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{\frac{n^2}{(n^4+3)(2^n-n)}}_{=b_n}t^n$$

Poiché $\sqrt[n]{|b_n|} \to \frac{1}{2}$, il raggio di convergenza della serie vale 2.

Per $t=2$ il termine vale $\dfrac{n^2 2^n}{(n^4+3)(2^n-n)} \sim \dfrac{1}{n^2}$ $\Rightarrow$ la serie converge

Per $t = -2$ la serie vale

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2 2^n}{(n^4+3)(2^n-n)},$$ che converge assolutamente e quindi semplicemente.

In definitiva la serie converge se e solo se

$$-2 \leq t = 4 - x^2 \leq 2$$

cioè se e solo se

$$x \in [-\sqrt{6}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{6}].$$