Cognome e nome .... **N. matricola** ....
Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:
◯ 16–18 gennaio ◯ 22–25 gennaio ◯ 29 gennaio–1 febbraio ◯ in un appello successivo.

Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi,** motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di strumenti elettronici di calcolo, appunti, libri di esercizi. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Studiare le funzioni

$$f(x) = x^2\,(4-x^2)^{-1/3}\,, \qquad g(x) = x^2\,|4-x^2|^{-1/3}\,,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo delle due funzioni.

---

2. Per $n \in \mathbb{N}$, sia

$$I_n = \int_0^1 e^{-2x} \sin^n(\pi x)\, dx\,.$$

a) Trovare una formula iterativa che esprima I_n in funzione di I_{n-2} (per $n \geq 2$);
b) Usare la formula trovata al punto a) per calcolare I_4.

---

3. Risolvere ciascuna delle seguenti equazioni e disegnarne le soluzioni nel piano complesso

$$z^{10} + 31z^5 - 32 = 0\ , \qquad (\overline{w})^2|w|^4 = -4w^4\ .$$

---

4. Calcolare l'ordine di infinito/infinitesimo delle seguenti funzioni:

$$f(x) = e^{(x-2)/x^2} - \cos\frac{3}{x} \quad (\text{per } x \to +\infty)\ , \qquad g(x) = \sqrt{1+2x^2} - \sqrt{1+2\sin^2 x} \quad (\text{per } x \to 0^+)\ ,$$

---

5. Al variare dei parametri reali α, x, studiare la convergenza di ciascuna delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{\sqrt{n}} - \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right), \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{(n^4+1)(n+2^n)}(9-x^2)^n\,.$$

Punteggi: 1: 8 punti; **2:** 7 punti; **3:** 7 punti; **4:** 6 punti; **5:** 7 punti. Per essere ammessi alla prova di teoria occorrono 15 punti. Valgono anche punteggi parziali.

1. Studiare le funzioni

$$f(x) = x^2\,(4-x^2)^{-1/3}\,, \qquad g(x) = x^2\,|4-x^2|^{-1/3}\,,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo delle due funzioni.

Dominio: $x \neq \pm 2$. f è pari $\Rightarrow$ basta studiarla per $x \geq 0$.

$f(x) = 0 \iff x = 0$

$f(x) > 0 \iff 0 < x < 2$.

$f(x) < 0 \iff x > 2$

f è di classe C^∞ nel suo dominio, quindi continua.

$\lim_{x \to 2^\pm} f(x) = \mp\infty$ $\quad x = 2$ asintoto verticale

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. f non ammette asintoti obliqui.

$$f'(x) = \frac{4}{3}\,\frac{6x - x^3}{(4-x^2)^{4/3}}$$

f strettamente decrescente in $[\sqrt{6}, +\infty)$

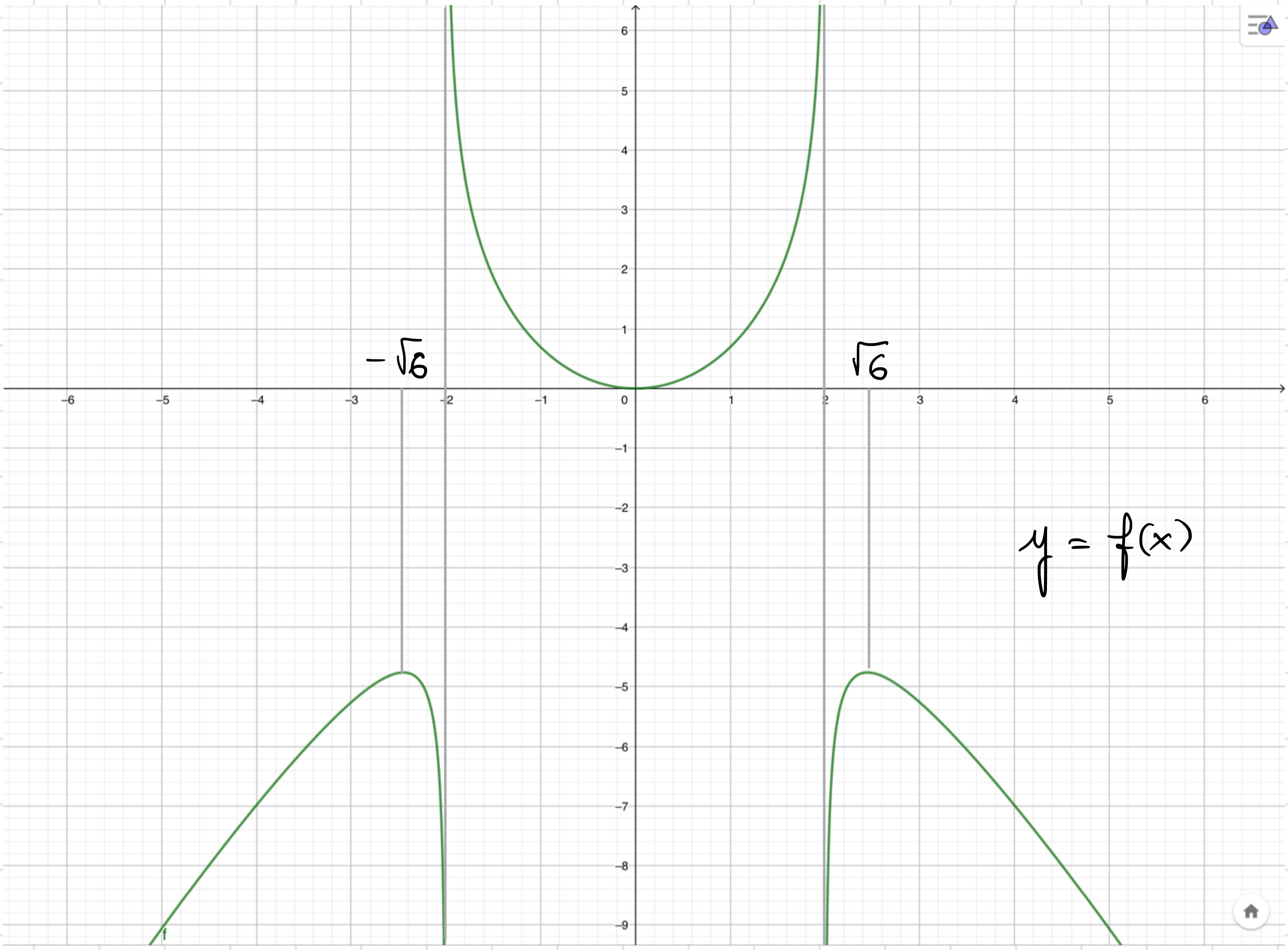
f strett. crescente in $[0, 2)$ e in $(2, \sqrt{6}]$.

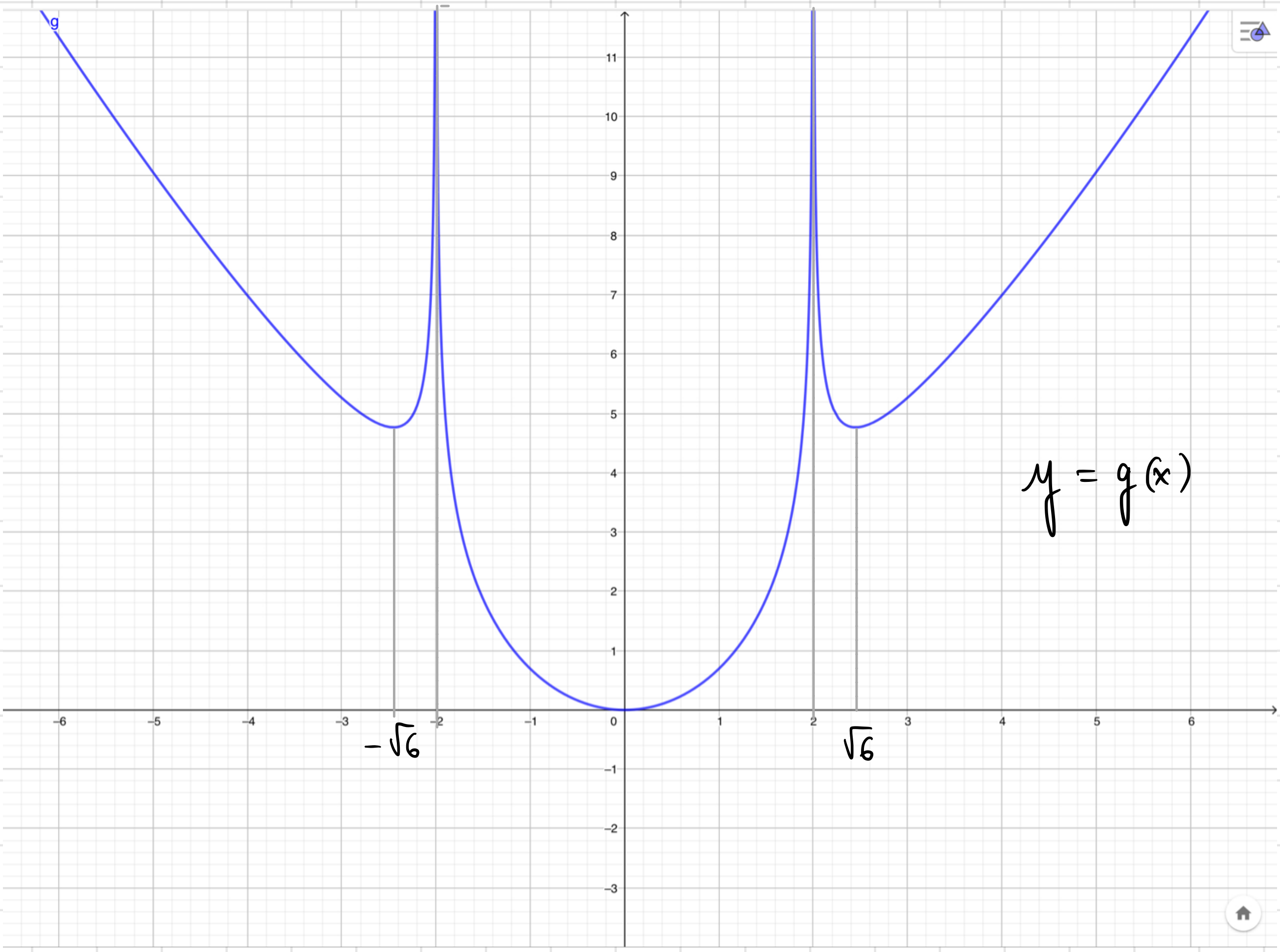
$x = 0$ pto di min. relativo, $x = \sqrt{6}$ pto di max. relativo

$$f''(x) = \frac{4}{9}\,(4-x^2)^{-7/3}\,\underbrace{(x^4 - 6x^2 + 72)}_{\text{sempre} > 0}$$

f strettamente convessa in $[0, 2)$, strett. concava in $(2, +\infty)$.

Niente flessi. Il grafico è il seguente:





Il grafico di $g(x)$ è semplicemente ottenuto "ribaltando" il grafico di f per $|x| > 2$.

2. Per $n \in \mathbb{N}$, sia
$$I_n = \int_0^1 e^{-2x} \sin^n(\pi x)\, dx\,.$$

a) Trovare una formula iterativa che esprima I_n in funzione di I_{n-2} (per $n \geq 2$);
b) Usare la formula trovata al punto a) per calcolare I_4.

Integriamo per parti due volte:

$$I_n = \int_0^1 e^{-2x} \sin^n(\pi x)\, dx =$$

$$= \underbrace{-\frac{e^{-2x}}{2} \sin^n(\pi x)\Big|_0^1}_{=\,0} + \frac{n\pi}{2} \int_0^1 e^{-2x} \sin^{n-1}(\pi x) \cos(\pi x)\, dx =$$

$$= \underbrace{-\frac{n\pi}{4} e^{-2x} \sin^{n-1}(\pi x) \cos(\pi x)\Big|_0^1}_{=\,0} +$$

$$+ \frac{n(n-1)\pi^2}{4} \int_0^1 e^{-2x} \sin^{n-2}(\pi x) \overbrace{\cos^2(\pi x)}^{1-\sin^2(\pi x)}\, dx +$$

$$- \frac{n\pi^2}{4} \int_0^1 e^{-2x} \sin^n(\pi x)\, dx =$$

$$= \frac{n(n-1)\pi^2}{4} (I_{n-2} - I_n) - \frac{n\pi^2}{4} I_n =$$

$$= \frac{n(n-1)\pi^2}{4} I_{n-2} - \frac{\pi^2 n^2}{4} I_n .$$

$$\Longrightarrow \boxed{I_n = \frac{n(n-1)\pi^2}{4 + \pi^2 n^2} I_{n-2}}$$

$$\Longrightarrow I_4 = \frac{3\pi^2}{1 + 4\pi^2} I_2 = \frac{3}{2} \frac{\pi^4}{(1 + 4\pi^2)(1 + \pi^2)} I_0$$

e, poiché $I_0 = \int_0^1 e^{-2x}\,dx = \frac{1-e^{-2}}{2}$

$$\Longrightarrow \quad I_4 = \frac{3}{4}\,\frac{\pi^4\,(1-e^{-2})}{(1+4\pi^2)(1+\pi^2)}$$

(verificata con Wolfram)

3. Risolvere ciascuna delle seguenti equazioni e disegnarne le soluzioni nel piano complesso

$$z^{10} + 31z^5 - 32 = 0\ , \qquad (\overline{w})^2|w|^4 = -4w^4\ .$$

a) Ponendo $z^5 = v$, si ottiene l'eq^{ne} di 2° grado

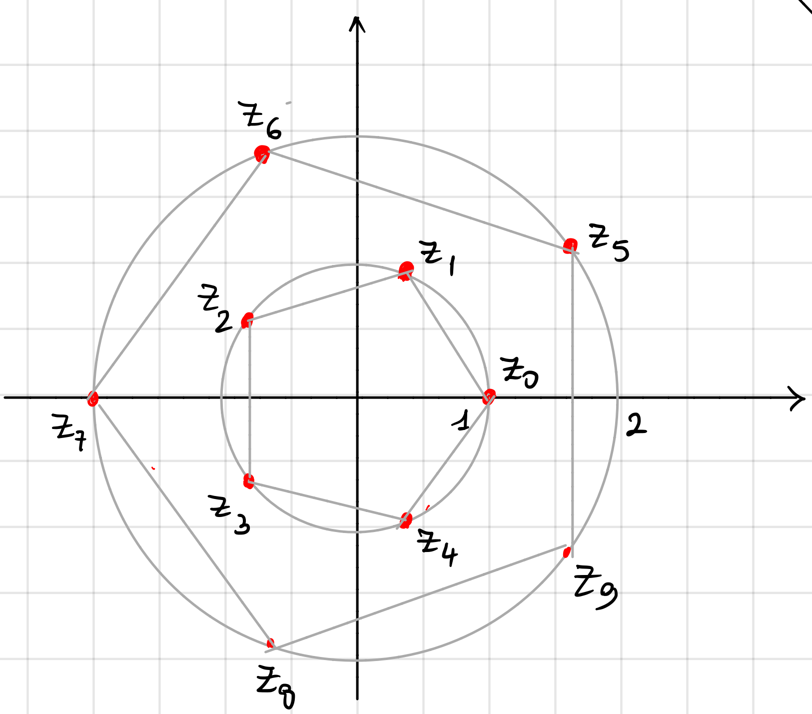
$$v^2 + 31v - 32 = 0$$

che ha come radici $v = 1$ e $v = -32$

Quindi devo risolvere

$$z^5 = 1 = e^{i0} \longrightarrow \begin{cases} z_0 = e^0 = 1 \\ z_1 = e^{i\frac{2}{5}\pi} \\ z_2 = e^{i\frac{4}{5}\pi} \\ z_3 = e^{i\frac{6}{5}\pi} \\ z_4 = e^{i\frac{8}{5}\pi} \end{cases}$$

$$z^5 = -32 = 32e^{i\pi} \longrightarrow \begin{cases} z_5 = 2e^{i\frac{\pi}{5}} \\ z_6 = 2e^{i\frac{3\pi}{5}} \\ z_7 = 2e^{i\pi} = -2 \\ z_8 = 2e^{i\frac{7}{5}\pi} \\ z_9 = 2e^{i\frac{9}{5}\pi} \end{cases}$$



b) Posto $w = \rho e^{i\theta}$, l'eq^{ne} diventa:

$$-6\theta = -\pi + 2k\pi$$

$$\rho^6 e^{-2i\theta} = 4\rho^4 e^{i(4\theta+\pi)}$$

$$\theta = +\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$$

$\rho = 0 \Rightarrow w_6 = 0$

$$\begin{cases} \rho = 2 \\ \theta = \dfrac{\pi + 2k\pi}{6} \end{cases}$$

$w_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} + i$

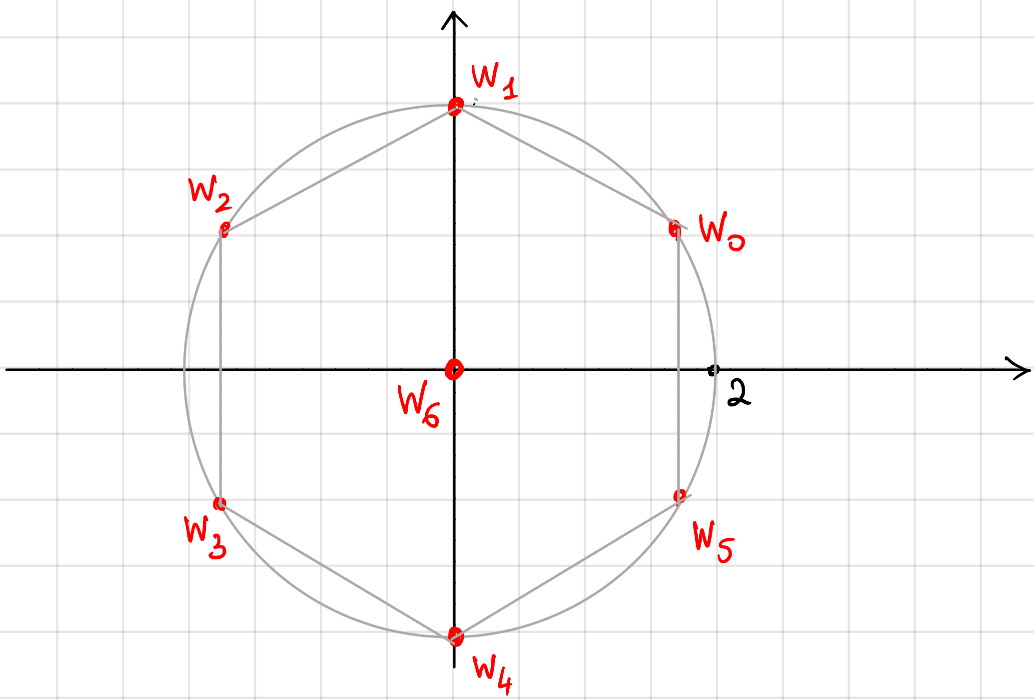
$w_1 = 2e^{i\pi/2} = 2i$

$w_2 = 2e^{i\frac{5}{6}\pi} = -\sqrt{3} + i$

$w_3 = 2e^{i\frac{7}{6}\pi} = -\sqrt{3} - i$

$w_4 = 2e^{i\frac{3}{2}\pi} = -2i$

$w_5 = 2e^{i\frac{11}{6}\pi} = \sqrt{3} - i$



4. Calcolare l'ordine di infinito/infinitesimo delle seguenti funzioni:

$$f(x) = e^{(x-2)/x^2} - \cos\frac{3}{x} \quad (\text{per } x \to +\infty)\,, \qquad g(x) = \sqrt{1+2x^2} - \sqrt{1+2\sin^2 x} \quad (\text{per } x \to 0^+)\,,$$

$f(x)$ è un infinitesimo per $x \to +\infty$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} - 1 + 1 - \cos\frac{3}{x} = \left[\frac{1}{x} = t \to 0^+\right]$$

$$= e^{t-2t^2} - 1 + 1 - \cos t =$$

$$= t\left(\frac{e^{t-2t^2}-1}{t} + \frac{1-\cos t}{t}\right) \sim t = \frac{1}{x}$$

$\to 0$

$$\sim \frac{t-2t^2}{t} \to 1$$

$\Rightarrow f(x)$ è un infinitesimo di ordine 1

$$g(x) = \sqrt{1+2x^2} - \sqrt{1+2\sin^2 x} =$$

$\left[\text{moltiplicando e dividendo per } \sqrt{1+2x^2} + \sqrt{1+2\sin^2 x}\right]$

OSS si poteva anche usare lo sviluppo di Taylor di $\sqrt{1+t}$

$$= \frac{\cancel{1} + 2x^2 - \cancel{1} - 2\sin^2 x}{\underbrace{\sqrt{1+2x^2} + \sqrt{1+2\sin^2 x}}_{\to 2}} \sim x^2 - \sin^2 x$$

$$= [\text{Taylor}] = x^2 - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = \cancel{x^2} - \cancel{x^2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

(infinitesimo di ordine 4).

5. Al variare dei parametri reali α, x, studiare la convergenza di ciascuna delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{\sqrt{n}} - \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right), \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{(n^4+1)(n+2^n)}(9-x^2)^n .$$

a) $$\frac{4}{\sqrt{n}} - \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\sqrt{n}} \underset{[\text{Taylor}]}{=} \frac{4}{\sqrt{n}} - \frac{\alpha}{\sqrt{n}} + \frac{\alpha^3}{3n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \sim$$

$$\sim \begin{cases} \dfrac{4-\alpha}{\sqrt{n}} & \text{se } \alpha \neq 4 \\[2ex] \dfrac{64}{3n^{3/2}} & \text{se } \alpha = 4 \end{cases}$$

Pertanto in ogni caso la serie è definitivamente a segno costante. Per il confronto con la serie armonica:

- diverge a $+\infty$ se $\alpha < 4$
- " a $-\infty$ se $\alpha > 4$
- converge se $\alpha = 4$

b) Ponendo $9 - x^2 = t$, diventa una serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{(n^4+1)(n+2^n)} t^n$$

Poiché $\sqrt[n]{|b_n|} \to \frac{1}{2}$, il raggio di convergenza della serie vale 2.

Per $t=2$ il termine vale $\dfrac{n^2 2^n}{(n^4+1)(n+2^n)} \sim \dfrac{1}{n^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ La serie converge

Per $t = -2$ la serie vale

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2 2^n}{(n^4+1)(n+2^n)},$$ che converge assolutamente e quindi semplicemente.

In definitiva la serie converge se e solo se

$$-2 \leq t = 9 - x^2 \leq 2$$

cioè se e solo se

$$x \in \left[-\sqrt{11}, -\sqrt{7}\right] \cup \left[\sqrt{7}, \sqrt{11}\right].$$