Cognome e nome .... **N. matricola** ....
Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:
◯ 16–18 gennaio ◯ 22–25 gennaio ◯ 29 gennaio–1 febbraio ◯ in un appello successivo.

Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi,** motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di strumenti elettronici di calcolo, appunti, libri di esercizi. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Studiare le funzioni

$$f(x) = x^2\,(x^2-2)^{-1/3}\,, \qquad g(x) = x^2\,|x^2-2|^{-1/3}\,,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo delle due funzioni.

---

2. Per $n \in \mathbb{N}$, sia

$$I_n = \int_0^1 e^{-x} \sin^n(\pi x)\, dx\,.$$

a) Trovare una formula iterativa che esprima I_n in funzione di I_{n-2} (per $n \geq 2$);
b) Usare la formula trovata al punto a) per calcolare I_4.

---

3. Risolvere ciascuna delle seguenti equazioni e disegnarne le soluzioni nel piano complesso

$$z^8 + (2-\sqrt{3}i)z^4 + 1 - \sqrt{3}i = 0\ , \qquad w^3|w|^4 = -27(\overline{w})^4\ .$$

---

4. Calcolare l'ordine di infinito/infinitesimo delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \cos\frac{x+3}{x^2} - e^{1/x} \quad (\text{per } x \to +\infty)\ , \qquad g(x) = \sqrt[3]{1+2\,\mathrm{tg}\,x} - \sqrt[3]{1+2x} \quad (\text{per } x \to 0^+)\ ,$$

---

5. Al variare dei parametri reali α, x, studiare la convergenza di ciascuna delle serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\left(\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\frac{\alpha}{n+1}\right)\,, \qquad \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n^2+3}{n^4(n-2^n)}(x^2-9)^n\,.$$

Punteggi: 1: 8 punti; **2:** 7 punti; **3:** 7 punti; **4:** 6 punti; **5:** 7 punti. Per essere ammessi alla prova di teoria occorrono 15 punti. Valgono anche punteggi parziali.

1. Studiare le funzioni

$$f(x) = x^2\,(x^2-2)^{-1/3}\,, \qquad g(x) = x^2\,|x^2-2|^{-1/3}\,,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo delle due funzioni.

Dominio: $x \neq \pm\sqrt{2}$. f è pari $\Rightarrow$ basta studiarla per $x \geq 0$.

$f(x) = 0 \iff x = 0$

$f(x) > 0 \iff x > \sqrt{2}$

$f(x) < 0 \iff 0 < x < \sqrt{2}$.

f è di classe C^∞ nel suo dominio, quindi continua.

$\lim_{x \to (\sqrt{2})^\pm} f(x) = \pm\infty \qquad x = \sqrt{2}$ asintoto verticale

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, f non ammette asintoti obliqui.

$$f'(x) = \frac{4}{3}(x^2-2)^{-4/3}(x^3-3x)$$

f strettamente crescente in $[\sqrt{3}, +\infty)$

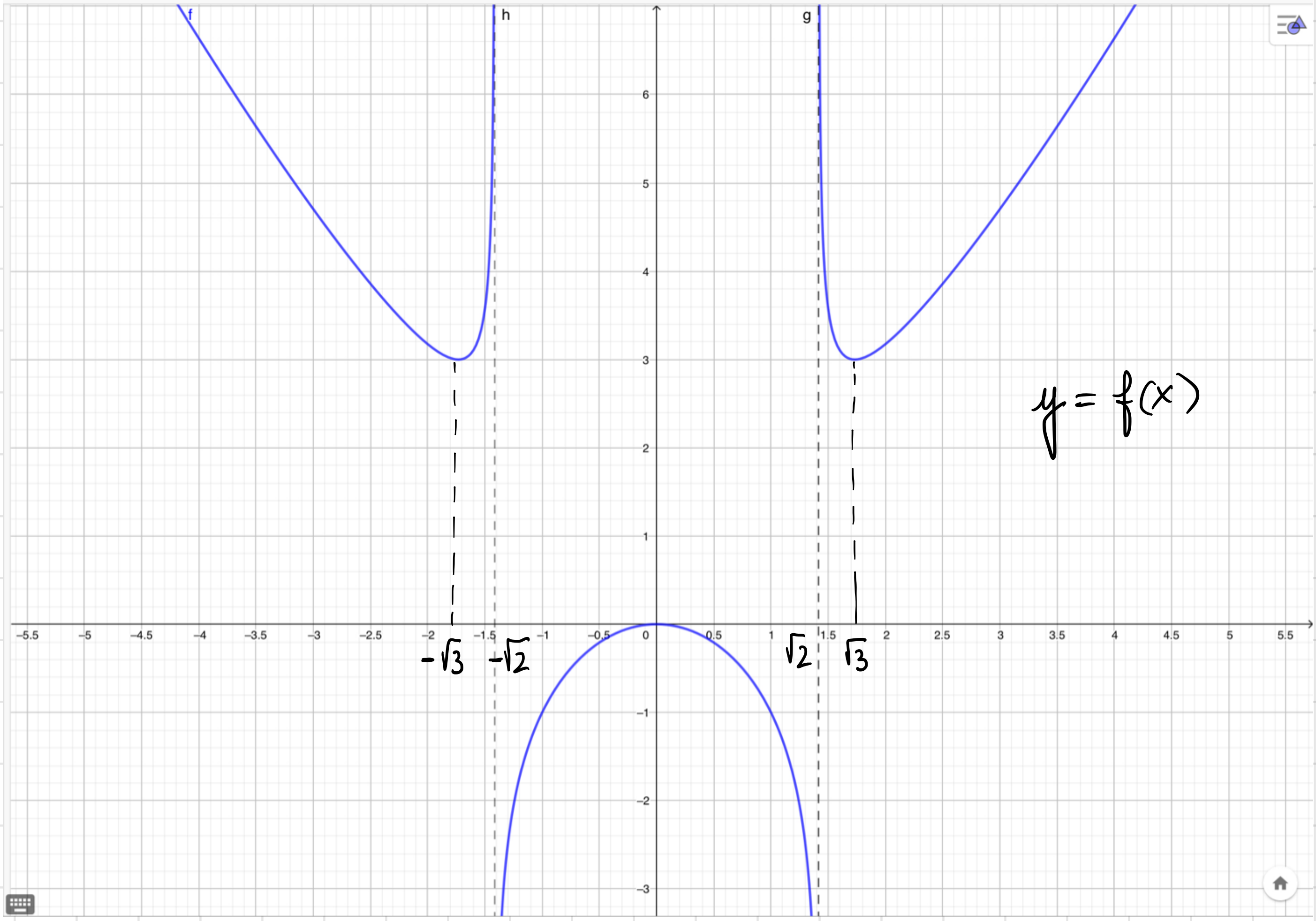
f strett. decrescente in $[0, \sqrt{2})$ e in $(\sqrt{2}, \sqrt{3}]$.

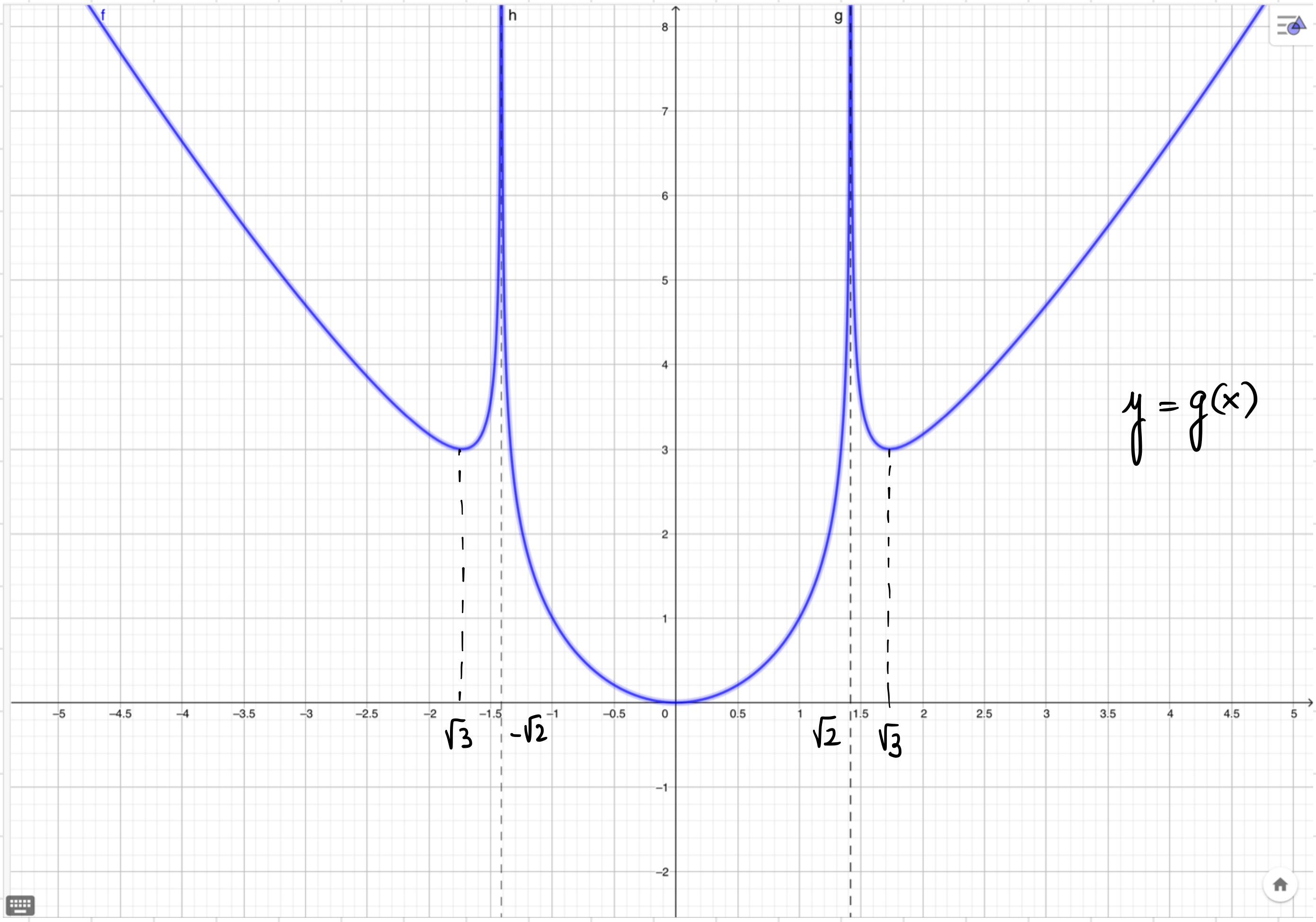
$x = 0$ pto di max. relativo, $x = \sqrt{3}$ pto di min. relativo

$$f''(x) = \frac{4}{9}(x^2-2)^{-7/3}\underbrace{(x^4-3x^2+18)}_{\text{sempre} > 0}$$

f strettamente concava in $[0, \sqrt{2})$, strett. convessa in $(\sqrt{2}, +\infty)$.

Niente flessi. Il grafico è il seguente:





Il grafico di $g(x)$ è semplicemente ottenuto "ribaltando" il grafico di f nell' intervallo $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

2. Per $n \in \mathbb{N}$, sia

$$I_n = \int_0^1 e^{-x} \sin^n(\pi x)\, dx\,.$$

a) Trovare una formula iterativa che esprima I_n in funzione di I_{n-2} (per $n \geq 2$);
b) Usare la formula trovata al punto a) per calcolare I_4.

Integriamo per parti due volte:

$$I_n = \int_0^1 e^{-x} \sin^n(\pi x)\, dx =$$

$$= \underbrace{-e^{-x}\sin^n(\pi x)\Big|_0^1}_{=0} + n\pi \int_0^1 e^{-x} \sin^{n-1}(\pi x)\cos(\pi x)\, dx =$$

$$= \underbrace{-n\pi\, e^{-x} \sin^{n-1}(\pi x)\cos(\pi x)\Big|_0^1}_{=0} +$$

$$+ \; n(n-1)\pi^2 \int_0^1 e^{-x} \sin^{n-2}(\pi x) \overbrace{\cos^2(\pi x)}^{1-\sin^2(\pi x)}\, dx \; +$$

$$- \; n\pi^2 \int_0^1 e^{-x} \sin^n(\pi x)\, dx =$$

$$= n(n-1)\pi^2 (I_{n-2} - I_n) - n\pi^2 I_n =$$

$$= n(n-1)\pi^2 I_{n-2} - \pi^2 n^2 I_n.$$

$$\Rightarrow \boxed{I_n = \frac{n(n-1)\pi^2}{1+\pi^2 n^2} I_{n-2}}$$

$$\Rightarrow I_4 = \frac{12\pi^2}{1+16\pi^2} I_2 = \frac{24\pi^4}{(1+16\pi^2)(1+4\pi^2)} I_0$$

e, poiché $I_0 = \int_0^1 e^{-x}\,dx = 1 - e^{-1}$

$$\Rightarrow \boxed{I_4 = \frac{24\,\pi^4\,(1-e^{-1})}{(1+16\pi^2)(1+4\pi^2)}}$$

(verificata con Wolfram)

3. Risolvere ciascuna delle seguenti equazioni e disegnarne le soluzioni nel piano complesso

$$z^8 + (2-\sqrt{3}i)z^4 + 1 - \sqrt{3}i = 0\,, \qquad w^3|w|^4 = -27(\overline{w})^4\,.$$

a) Ponendo $z^4 = v$, si ottiene l'eq^{ne} di 2° grado

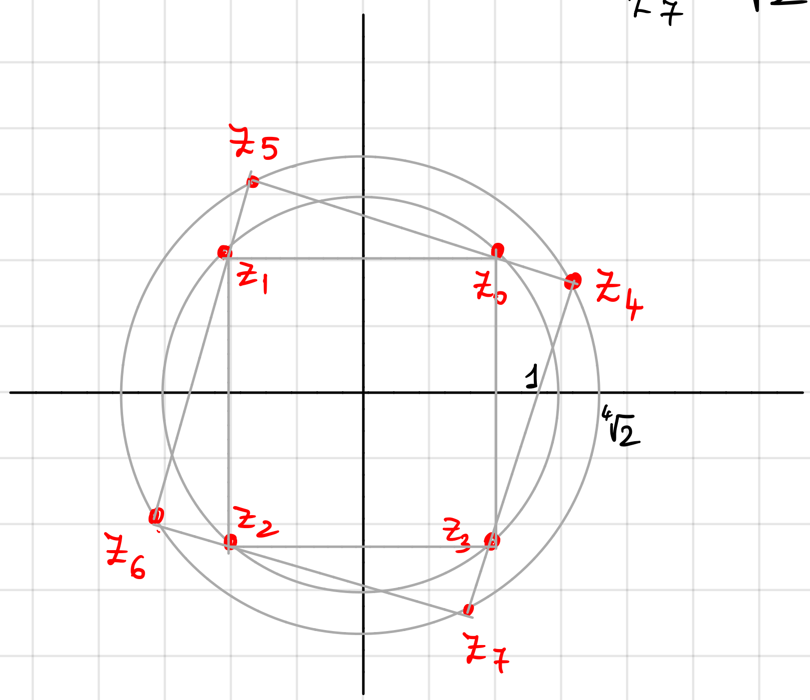
$$v^2 + (2-\sqrt{3}i)v + 1 - \sqrt{3}i = 0$$

che ha come radici $v = -1$ e $v = -1+\sqrt{3}i$

Quindi devo risolvere

$$z^4 = -1 = e^{i\pi} \to \begin{cases} z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \\ z_1 = e^{i\frac{3}{4}\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) \\ z_2 = e^{i\frac{5}{4}\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i) \\ z_3 = e^{i\frac{7}{4}\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) \end{cases}$$

$$z^4 = -1+\sqrt{3}i = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \to \begin{cases} z_4 = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{\pi}{6}} = 2^{-\frac{3}{4}}(\sqrt{3}+i) \\ z_5 = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{2}{3}\pi} = 2^{-3/4}(-1+\sqrt{3}i) \\ z_6 = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{7}{6}\pi} = 2^{-3/4}(-\sqrt{3}-i) \\ z_7 = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{5}{3}\pi} = 2^{-3/4}(1-\sqrt{3}i) \end{cases}$$



b) Posto $w = \rho e^{i\theta}$, l'eq^{ne} diventa:

$$\rho^7 e^{i3\theta} = 27 \rho^4 e^{i(-4\theta+\pi)}$$

$$\rho = 0 \Rightarrow w_7 = 0$$

$$\begin{cases} \rho = 3 \\ \theta = \dfrac{\pi + 2k\pi}{7} \end{cases}$$

$$w_0 = 3e^{i\frac{\pi}{7}}$$

$$w_1 = 3e^{i\frac{3}{7}\pi}$$

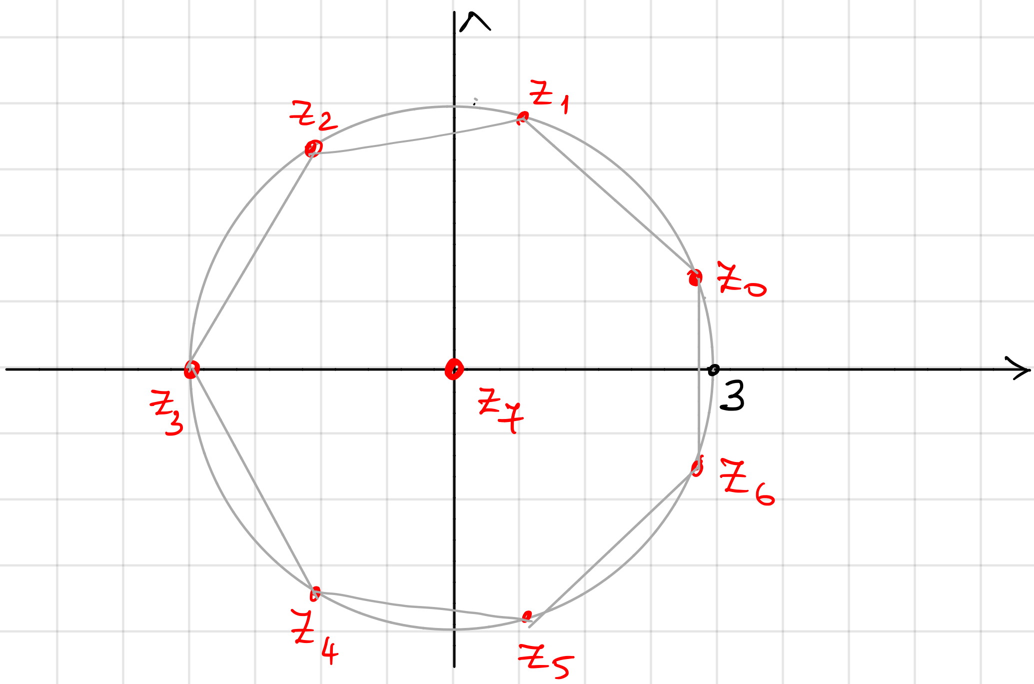
$$w_2 = 3e^{i\frac{5}{7}\pi}$$

$$w_3 = 3e^{i\pi} = -3$$

$$w_4 = 3e^{i\frac{9}{7}\pi}$$

$$w_5 = 3e^{i\frac{11}{7}\pi}$$

$$w_6 = 3e^{i\frac{13}{7}\pi}$$



4. Calcolare l'ordine di infinito/infinitesimo delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \cos\frac{x+3}{x^2} - e^{1/x} \quad (\text{per } x \to +\infty), \qquad g(x) = \sqrt[3]{1+2\operatorname{tg}x} - \sqrt[3]{1+2x} \quad (\text{per } x \to 0^+),$$

$f(x)$ è un infinitesimo per $x \to +\infty$

$$f(x) = \cos\frac{x+3}{x^2} - 1 + 1 - e^{1/x} = \left[\frac{1}{x} = t \to 0^+\right]$$

$$= \cos(t + 3t^2) - 1 + 1 - e^t =$$

$$= t\left(\underbrace{\frac{\cos(t+3t^2)-1}{t}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1-e^t}{t}}_{\to -1}\right) \sim -t = -\frac{1}{x}$$

$\cos(t+3t^2)-1 \sim -\frac{(t+3t^2)^2}{2} \sim \frac{t^2}{2}$

$\Rightarrow f(x)$ è un infinitesimo di ordine 1

$$g(x) = \sqrt[3]{1+2\operatorname{tg}x} - \sqrt[3]{1+2x} =$$

OSS si poteva anche usare lo sviluppo di Taylor di $\sqrt[3]{1+t}$

[moltiplicando e dividendo per $(1+2\operatorname{tg}x)^{2/3} + ((1+2\operatorname{tg}x)(1+2x))^{1/3} + (1+2x)^{2/3}$]

$$= \frac{1 + 2\operatorname{tg}x - 1 - 2x}{\underbrace{(1+2\operatorname{tg}x)^{2/3} + ((1+2\operatorname{tg}x)(1+2x))^{1/3} + (1+2x)^{2/3}}_{\to 3}} \sim \frac{2}{3}(\operatorname{tg}x - x) =$$

$$= [\text{Taylor}] = \frac{2}{3}\left(\cancel{x} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \cancel{x}\right) \sim \frac{2}{9}x^3 \quad \text{per } x \to 0$$

(infinitesimo di ordine 3).

5. Al variare dei parametri reali α, x, studiare la convergenza di ciascuna delle serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\left(\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\frac{\alpha}{n+1}\right), \qquad \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n^2+3}{n^4(n-2^n)}(x^2-9)^n .$$

a) $\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\frac{\alpha}{n+1} \underset{\text{[Taylor]}}{=} -\frac{2}{n+1}-\frac{4}{2(n+1)^2}+o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)+\frac{\alpha}{n+1}$

$$\sim \begin{cases} \dfrac{\alpha-2}{n+1} \sim \dfrac{\alpha-2}{n} & \text{se } \alpha \neq 2 \\[2mm] -\dfrac{2}{(n+1)^2} \sim -\dfrac{2}{n^2} & \text{se } \alpha = 2 . \end{cases}$$

Pertanto in ogni caso la serie è definitivamente a segno costante. Per il confronto con la serie armonica:

- diverge a $+\infty$ se $\alpha > 2$
- " a $-\infty$ se $\alpha < 2$
- converge se $\alpha = 2$.

b) Ponendo $x^2-9=t$, diventa una serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2+3}{n^4(n-2^n)}\, t^n$$

"b_n".

Poiché $\sqrt[n]{|b_n|} \to \frac{1}{2}$, il raggio di convergenza della serie vale 2.

Per $t=2$ il termine vale $\dfrac{(n^2+3)\,2^n}{n^4(n-2^n)} \sim -\dfrac{1}{n^2} \Rightarrow$ la serie converge

Per $t = -2$ la serie vale

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{(n^2+3)2^n}{n^4(n-2^n)}$$

, che converge assolutamente e quindi semplicemente,

in quanto $\left|\frac{(n^2+3)2^n}{n^4(n-2^n)}\right| \sim \frac{1}{n^2}$

In definitiva la serie converge se e solo se

$$-2 \leq t = x^2 - 9 \leq 2$$

cioè se e solo se

$$x \in [-\sqrt{11}, -\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7}, \sqrt{11}] .$$