Cognome e nome .... **N. matricola** ....

Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:

◯ 12 luglio ◯ 19 luglio ◯ 26 luglio ◯ nell'appello di settembre.

Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi,** motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di strumenti elettronici di calcolo, appunti, libri di esercizi. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Studiare la funzione

$$f(x) = \operatorname{tg} x - x + \ln|\cos x|\,,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo della funzione.

---

2. Calcolare l'area della regione delimitata dagli assi coordinati, dalla retta $x = \operatorname{arctg} 3$ e dal grafico della funzione

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}{\operatorname{tg}^2 x + 9}\,.$$

---

3. Risolvere ciascuna delle seguenti equazioni e disegnarne le soluzioni nel piano complesso

$$z^4 = \left(e^{-i\pi/4} z\right)^2 (\overline{z})^2\,, \qquad (1 - |w|)(w^5 - w) = 0\,.$$

---

4. Calcolare l'ordine di infinitesimo delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \ln(-\sin x) \quad (\text{per } x \to -\frac{\pi}{2})\,, \qquad g(x) = \sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+1} + 2e^{-\sqrt{x}} \quad (\text{per } x \to +\infty)\,.$$

---

5. Studiare la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln(e^n + n^3) - \ln(e^n + 1)\right)\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 x + e^{nx}}{e^{(n+1)x}} \quad (x \in \mathbb{R})\,.$$

Punteggi: 1: 8 punti; **2:** 7 punti; **3:** 7 punti; **4:** 6 punti; **5:** 7 punti. Per essere ammessi alla prova di teoria occorrono 15 punti. Valgono anche punteggi parziali.

1. Studiare la funzione
$$f(x) = \operatorname{tg} x - x + \ln|\cos x|,$$
e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo della funzione.

Dominio: $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

f non è periodica, ma $f(x+\pi) = f(x) - \pi$, quindi basta studiare la funzione in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, poi nel successivo intervallo $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$ il grafico sarà lo stesso ma traslato verso il basso di π, e così via.

Limiti significativi

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \left(\underbrace{\operatorname{tg} x}_{\downarrow\, +\infty} \underbrace{- x}_{\downarrow\, -\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\ln|\cos x|}_{\downarrow\, -\infty} \right) = (+\infty - \infty)$$

$$= -\frac{\pi}{2} + \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\downarrow\, +\infty} \left(\underbrace{\operatorname{sen} x}_{\downarrow\, 1} + \underbrace{\cos x \ln|\cos x|}_{\downarrow\, 0} \right) = +\infty \qquad \left(\lim_{t \to 0^+} t \ln t = 0\right)$$

$$\lim_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \left(\underbrace{\operatorname{tg} x}_{\downarrow\, -\infty} \underbrace{- x}_{\downarrow\, \pi/2} + \underbrace{\ln|\cos x|}_{\downarrow\, -\infty} \right) = -\infty$$

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ sono asintoti verticali.

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) \ \nexists$.

$f(x)$ è continua nel suo dominio.

Derivata prima

f è derivabile nel suo dominio

$$f'(x) = tg^2 x - tg\, x = tg\, x\,(tg\, x - 1) \quad \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

f' è periodica di periodo π.

La studio in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$f'(x) = 0 \iff x = 0, \quad x = \frac{\pi}{4}.$$

$$f'(x) > 0 \iff x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'(x) < 0 \iff x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right).$$

f è **strettamente crescente** in $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ e in $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

strettamente decrescente in $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

$x = 0$ p.to di **massimo relativo stretto**

$x = \frac{\pi}{4}$ p.to di **minimo relativo stretto**.

$$f(0) = 0 \qquad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$

Derivata seconda

$$f''(x) = (2\, tg\, x - 1)(1 + tg^2 x) \qquad \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

la studio in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$f''(x) = 0 \iff x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$$

$$f''(x) > 0 \iff x \in \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

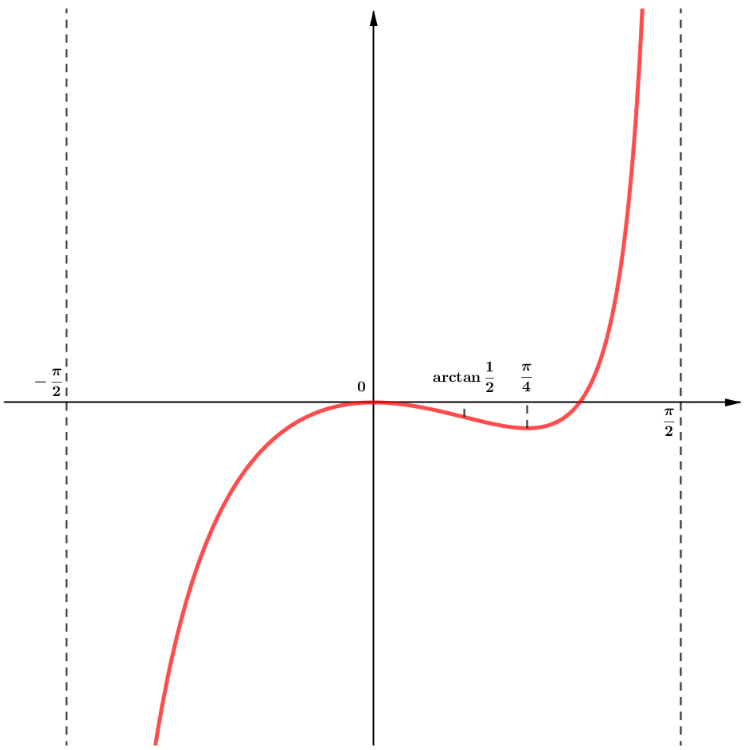
$$f''(x) < 0 \iff x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right).$$

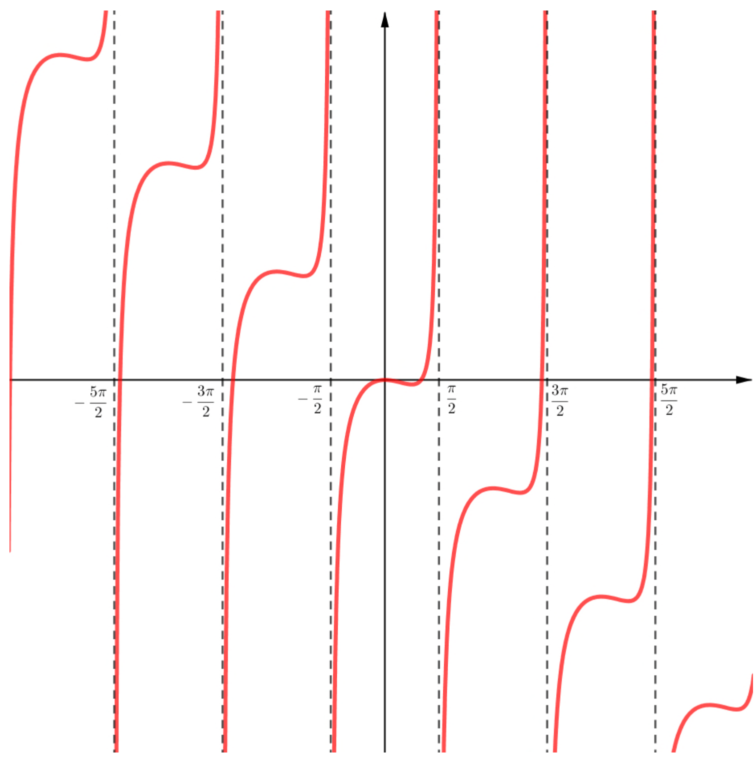
f strettamente convessa in $\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

f strettamente concava in $\left(-\frac{\pi}{2}, \operatorname{arctg} 1/2\right]$

$x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ è pto di flesso.

Segue un grafico qualitativo:





2. Calcolare l'area della regione delimitata dagli assi coordinati, dalla retta $x = \operatorname{arctg} 3$ e dal grafico della funzione

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}{\operatorname{tg}^2 x + 9}\,.$$

Senza farne il grafico, osserviamo che $f(x) \geq 0 \;\forall x \in [0, \operatorname{arctg} 3]$, quindi l'area vale

$$\int_0^{\operatorname{arctg} 3} \frac{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}{\operatorname{tg}^2 x + 9}\,dx = \int_0^{\operatorname{arctg} 3} \frac{\operatorname{tg}^2 x\,\overbrace{(1 + \operatorname{tg}^2 x)}^{D(\operatorname{tg} x)}}{\operatorname{tg}^2 x + 9}\,dx =$$

[sost. $\operatorname{tg} x = t$]

$$= \int_0^3 \frac{t^2 + 9 - 9}{t^2 + 9}\,dt =$$

$$= \int_0^3 \left(1 - \frac{9}{t^2+9}\right) dt = 3 - 9 \int_0^3 \frac{dt}{t^2+9} =$$

$$= 3 - \int_0^3 \frac{dt}{\left(\frac{t}{3}\right)^2 + 1} = 3 - 3 \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{3}\right)\Big|_0^3 = 3 - \frac{3}{4}\pi$$

3. Risolvere ciascuna delle seguenti equazioni e disegnarne le soluzioni nel piano complesso

$$z^4 = \left(e^{-i\pi/4} z\right)^2 (\overline{z})^2 , \qquad (1 - |w|)(w^5 - w) = 0 .$$

a) $z^4 = e^{-i\frac{\pi}{2}} z^2 (\overline{z})^2$ (divido per z^2 annotando la sol^{ne} $z=0$)

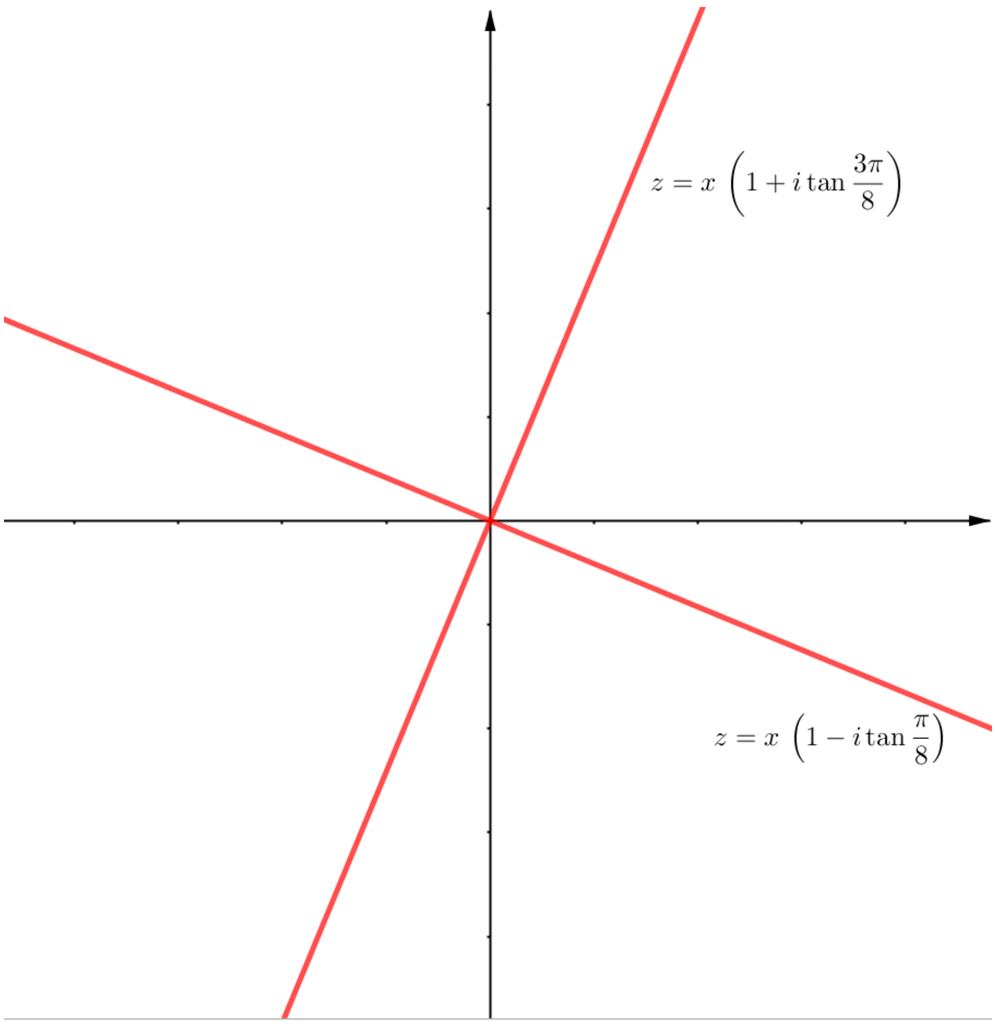
$z^2 = e^{-i\frac{\pi}{2}} (\overline{z})^2$ ponendo $z = \rho e^{i\theta}$

$$\rho^2 e^{i2\theta} = \rho^2 e^{i\left(-2\theta - \frac{\pi}{2}\right)}$$

$\Rightarrow$ ρ qualsiasi,

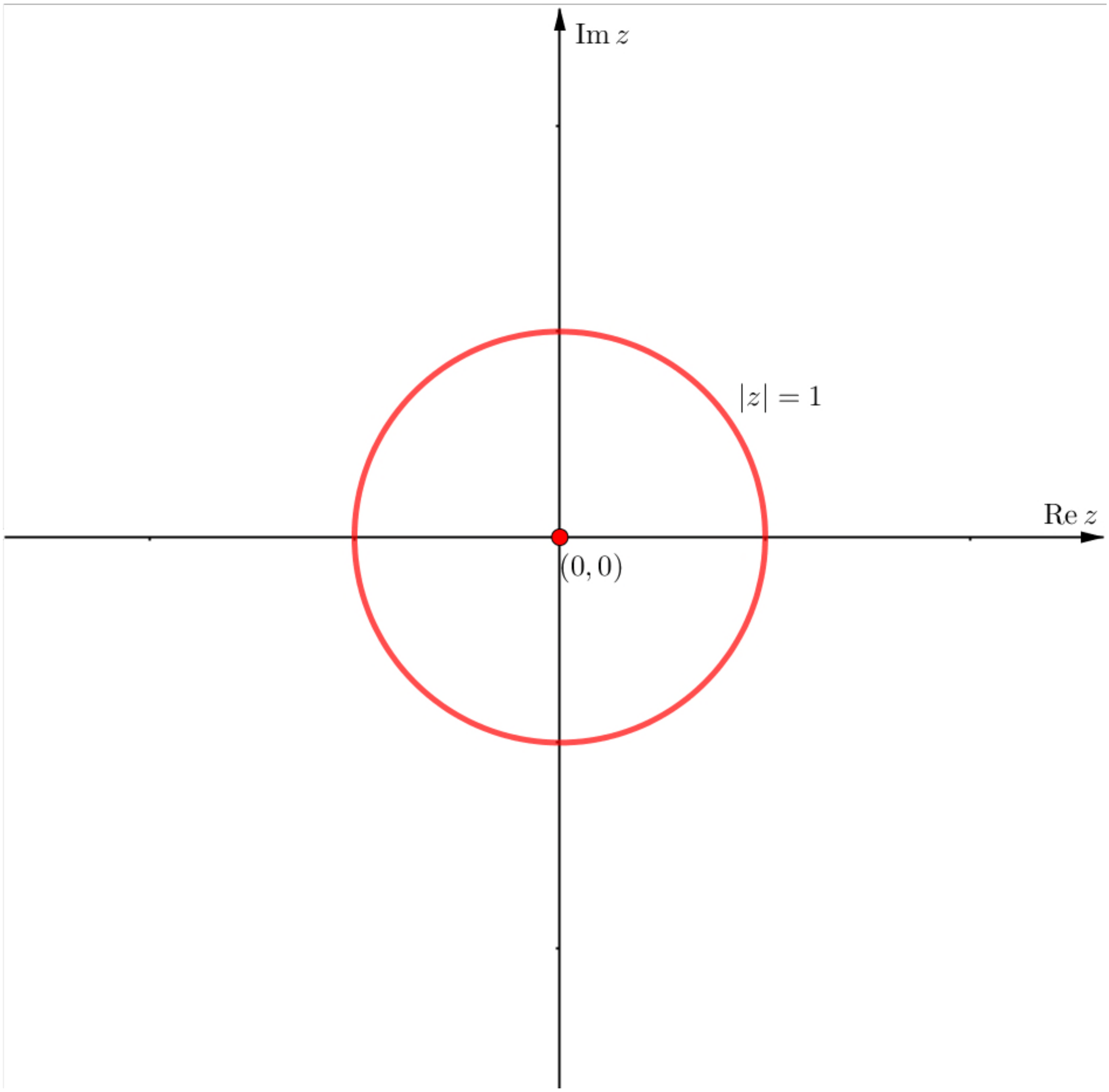
$4\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff \theta = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \quad k = 0, 1, 2, 3$

Sono due rette, come da disegno:



b) l'eq^{ne} equivale a $(|w|=1) \vee (w=0) \vee (w^4=1)$

La prima descrive la circonferenza unitaria.
La seconda è l'origine.
La terza sono le radici quarte di $+1$, che però hanno modulo 1 e quindi sono state già considerate.
In definitiva le soluzioni sono: l'origine e la circonferenza unitaria.



4. Calcolare l'ordine di infinitesimo delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \ln(-\sin x) \quad (\text{per } x \to -\frac{\pi}{2}), \qquad g(x) = \sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+1} + 2e^{-\sqrt{x}} \quad (\text{per } x \to +\infty).$$

a) Ovviamente per $x \to -\frac{\pi}{2}$ si ha $\sin x \to -1 \Rightarrow f(x) \to 0$

Conviene porre $x = -\frac{\pi}{2} + t$ con $t \to 0$.

Si ha:

$$\ln(-\sin x) = \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) = \ln(\cos t) =$$

$$= \ln(1 + \underbrace{(\cos t - 1)}_{\downarrow\, 0}) \underset{t\to 0}{\sim} \cos t - 1 \sim -\frac{t^2}{2} = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2$$

Si tratta di un infinitesimo di ordine 2 (sia per $x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+$ che per $x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^-$)

b) Per $x \to +\infty$ si ha

$$g(x) = x\left(\underbrace{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}_{= 1+\frac{3}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)} - \underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}_{= 1+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)}\right) + 2e^{-\sqrt{x}} =$$

$$= x\left(\frac{1}{x^2} + o\,\frac{1}{x^2}\right) + 2e^{-\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) + 2e^{-\sqrt{x}} \sim \frac{1}{x}$$

avendo osservato che $e^{-\sqrt{x}}$ è infinitesimo di ordine superiore rispetto a $\frac{1}{x^\alpha}$ $\forall \alpha > 0$, quando $x \to +\infty$.

$g(x)$ è quindi un infinitesimo di ordine 1.

5. Studiare la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln(e^n + n^3) - \ln(e^n + 1)\right), \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 x + e^{nx}}{e^{(n+1)x}} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

a)

$$\ln(e^n + n^3) - \ln(e^n + 1) = \ln\left(\underbrace{\frac{e^n + n^3}{e^n + 1}}_{\to 1}\right) =$$

$$= \ln\left(1 + \underbrace{\frac{n^3 - 1}{e^n + 1}}_{\to 0}\right) \sim \frac{n^3 - 1}{e^n + 1} \sim \frac{n^3}{e^n}$$

D'altra parte la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$ converge (ad esempio per il criterio del rapporto), quindi anche la serie di partenza converge (criterio del confronto asintotico).

b) Per $x > 0$ $\quad \frac{n^2 x + e^{nx}}{e^{(n+1)x}} \sim \frac{e^{nx}}{e^{(n+1)x}} = \frac{1}{e^x}$

quindi il termine della serie non è infinitesimo
$\Rightarrow$ la serie diverge.

Per $x = 0$, il termine generico della serie vale 1
$\Rightarrow$ la serie diverge

Per $x < 0$, $\quad \frac{\overbrace{n^2 x}^{\to -\infty} + \overbrace{e^{nx}}^{\to 0}}{\underbrace{e^{(n+1)x}}_{\to 0^+}} \longrightarrow \left(\frac{-\infty}{0^+}\right) = -\infty$

e la serie diverge negativamente.