Esercizi d'esame su problemi differenziali

(CC.LL. Vari - AA 2013-14)

Prof. F. Pitolli

ESERCIZIO

Si consideri il problema differenziale

$$\begin{cases} y' + 2y^2 = \dfrac{1}{1+x^2} & x \in (0,1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione esatta è $y(x) = x/(1+x^2)$.

1) Approssimare $y(0.5)$ e $y(1)$ con un metodo del secondo ordine.

2) Calcolare l'errore globale di troncamento delle approssimazioni ottenute.

ESERCIZIO

Dato il problema differenziale

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 4\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0\,, & x \in \mathbb{R}\,, \quad t \geq 0\,, \\ u(x,0) = \begin{cases} x+1 & \text{per} & -1 \leq x < 0 \\ 1-x & \text{per} & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} & x \in \mathbb{R}\,, \end{cases}$$

1) calcolarne la soluzione esatta;

2) scrivere uno schema numerico adatto ad approssimare la soluzione del problema differenziale dato specificando le condizioni che ne garantiscono la convergenza.

ESERCIZIO

1) Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - \frac{1}{3}\,y'(x) + \big(y(x)\big)^2 = \cos(x) & x > 2 \\ y(2) = 0 \qquad y'(2) = -1 \end{cases}$$

utilizzare il metodo di Eulero con passo $k = 0.5$ per approssimare $\{y(2.5), y(3)\}$ e $\{y'(2.5), y'(3)\}$;

2) determinare se $y(x)$ è monotona nell'intervallo $[2,3]$.

ESERCIZIO

Dato il problema differenziale

$$\begin{cases} (1+x^2)^3\,y'' = -(1+x^2)^2\,y' + y + \dfrac{6x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x - 3}{1+x^2}, & 0 < x < 1\,, \\ y(0) = 1, \quad y(1) = 1/2\,, \end{cases}$$

1) scrivere uno schema numerico del secondo ordine adatto ad approssimare la soluzione del problema differenziale in 5 nodi equispaziati dell'intervallo [0,1];

2) sapendo che la soluzione esatta è $y(x) = 1/(1 + x^2)$ dare una stima dell'errore globale di troncamento che si commette approssimando $y(0.5)$ con lo schema numerico individuato al punto precedente.

ESERCIZIO

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 - x^2, & x \in [1, 3], \\ y(1) = 1, \end{cases}$$

dove $y \in C^2[1, 3]$ con $-3^p \leq y^{(p)}(x) \leq 1$, $p = 1, 2, 3, 4$, per $x \in [1, 3]$.

1) Determinare quale passo di integrazione è sufficiente a garantire che l'errore globale di troncamento che si commette risolvendo numericamente il problema differenziale dato con il metodo di Eulero esplicito sia inferiore a 10^{-3}. (Si trascurino gli errori di arrotondamento).

2) Supponendo che nei calcoli si utilizzino 5 cifre decimali, calcolare il passo ottimo.