

## Linee caratteristiche per le equazioni quasi-lineari del 2° ordine

### Problema di Cauchy

$$\begin{cases} a(x, y, u, u_x, u_y)u_{xx} + b(x, y, u, u_x, u_y)u_{xy} + c(x, y, u, u_x, u_y)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y) \\ u(\alpha(\tau), \beta(\tau)) = \varphi(\tau) & \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1 \\ u_x(\alpha(\tau), \beta(\tau)) = g(\tau) & \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1 \\ u_y(\alpha(\tau), \beta(\tau)) = h(\tau) & \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1 \end{cases}$$

Se  $\varphi, g, h$  sono **derivabili**  $\Rightarrow \begin{cases} g'(\tau) = \alpha'(\tau)u_{xx} + \beta'(\tau)u_{xy} \\ h'(\tau) = \alpha'(\tau)u_{xy} + \beta'(\tau)u_{yy} \end{cases}$

Per poter calcolare  $u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$  su  $\Gamma$  bisogna risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} a(x, y, u, u_x, u_y)u_{xx} + b(x, y, u, u_x, u_y)u_{xy} + c(x, y, u, u_x, u_y)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y) \\ \alpha'(\tau)u_{xx} + \beta'(\tau)u_{xy} = g'(\tau) \\ \alpha'(\tau)u_{xy} + \beta'(\tau)u_{yy} = h'(\tau) \end{cases} \quad \text{su } \Gamma$$

che ammette soluzione solo se  $D = \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ \alpha' & \beta' & 0 \\ 0 & \alpha' & \beta' \end{bmatrix} \neq 0$

## Linee caratteristiche per le equazioni del 2° ordine

Si cerca la soluzione  $u(x, y)$  del **problema di Cauchy**

$$\begin{cases} F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 \\ u(\alpha(\tau), \beta(\tau)) = \varphi(\tau) & \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1 \\ u_x(\alpha(\tau), \beta(\tau)) = g(\tau) & \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1 \\ u_y(\alpha(\tau), \beta(\tau)) = h(\tau) & \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1 \end{cases} \Rightarrow \varphi'(\tau) = g(\tau) \underbrace{\alpha'(\tau)}_{u_x} + h(\tau) \underbrace{\beta'(\tau)}_{u_y}$$

dove  $x = \alpha(\tau)$  e  $y = \beta(\tau)$  sono le **equazioni parametriche** di una curva  $\Gamma$  assegnata.

$\Rightarrow$  Si cerca una **superficie integrale** che passi per la **curva**  $\mathcal{C}$  (dello spazio  $(x, y, u)$ ) di equazione

$$x = \alpha(\tau) \quad y = \beta(\tau) \quad u = \varphi(\tau)$$

e che in ogni punto di  $\mathcal{C}$  sia **tangente** al piano di equazione

$$(x - \alpha(\tau))g(\tau) + (y - \beta(\tau))h(\tau) = u - \varphi(\tau)$$

## Equazione delle linee caratteristiche

**Linee caratteristiche:** sono le **curve** lungo le quali

$$D = a(\beta')^2 - b\alpha'\beta' + c(\alpha')^2 = 0$$

$\Rightarrow$  se si assegnano le condizioni iniziali sulle linee caratteristiche il problema di Cauchy è **impossibile** o **indeterminato**

$$\Rightarrow a \left( \frac{dy}{d\tau} \right)^2 - b \frac{dx}{d\tau} \frac{dy}{d\tau} + c \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 = 0 \Rightarrow a \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - b \frac{dy}{dx} + c = 0$$

### Direzioni caratteristiche

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y, u, u_x, u_y) \pm \sqrt{b(x, y, u, u_x, u_y)^2 - 4a(x, y, u, u_x, u_y)c(x, y, u, u_x, u_y)}}{2a(x, y, u, u_x, u_y)}$$

**Nota.** Se l'equazione ha coefficienti  $a, b, c$  **costanti** le **curve caratteristiche** sono **due famiglie di rette** con coefficiente an-

golare  $\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \text{costante}$

## Equazioni quasilineari del 2° ordine

$$a(x, y, u, u_x, u_y)u_{xx} + b(x, y, u, u_x, u_y)u_{xy} + c(x, y, u, u_x, u_y)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$$

### Linee caratteristiche

In ogni punto  $(x, y)$  le linee caratteristiche hanno **tangente** data da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y, u, u_x, u_y) \pm \sqrt{b(x, y, u, u_x, u_y)^2 - 4a(x, y, u, u_x, u_y)c(x, y, u, u_x, u_y)}}{2a(x, y, u, u_x, u_y)}$$

- Nei punti  $x, y$  in cui  $b^2 - 4ac > 0$  ci sono **due direzioni caratteristiche reali** → l'equazione è **iperbolica**
- Nei punti  $x, y$  in cui  $b^2 - 4ac = 0$  le **direzioni caratteristiche** sono **reali e coincidenti** → l'equazione è **parabolica**
- Nei punti  $x, y$  in cui  $b^2 - 4ac < 0$  le **direzioni caratteristiche** sono **complesse coniugate** → l'equazione è **ellittica**

4

## Equazioni paraboliche

Le equazioni paraboliche modellizzano problemi **non stazionari** in cui predomina il **trasporto per conduzione o diffusione**.

### Esempio

La **temperatura**  $u(x, t)$  assunta in un generico punto  $x$  al tempo  $t$  da un **filo metallico omogeneo termicamente isolato** che abbia temperatura costante  $T_0$  all'**istante iniziale** e sia mantenuto a temperatura  $T_1$  ai suoi **estremi**, soddisfa l'equazione

$$\begin{cases} u_{xx} = \frac{RC}{K} u_t & 0 < x < L, t > 0 \\ u(x, 0) = T_0 & 0 \leq x \leq L \\ u(0, t) = u(L, t) = T_1 & t > 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L : \text{lunghezza} \\ R : \text{densità} \\ C : \text{calore specifico} \\ K : \text{conduttività termica} \end{array}$$

5

## Equazione di diffusione del calore

$$u_{xx} = u_t \Rightarrow a = 1, b = c = 0 \Rightarrow \frac{dt}{dx} = 0$$

**Curve caratteristiche:**  $t = \text{costante}$  ⇒ Non si possono assegnare le condizioni iniziali per  $u$  e  $u_t$  lungo l'asse  $x$

### Problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t & x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbf{R} \end{cases} \Rightarrow u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\xi)^2/4t} f(\xi) d\xi$$

**Nota.** Se  $f(x) > 0$  per  $x \in [0, L]$  e  $f(x) = 0$  per  $x \notin [0, L]$ ,  $u(x, t) > 0$  per  $x \in \mathbf{R}$  e  $t \geq 0$  ⇒ il calore si **diffonde**

### Dominio di dipendenza continuo

In ogni punto  $P(x, t)$  la soluzione  $u(x, t)$  **dipende** dai valori del **dato iniziale**  $f(x)$  su tutto  $\mathbf{R}$

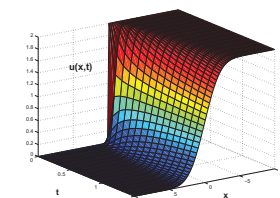
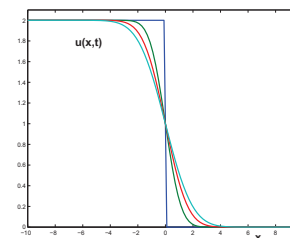
⇒ il **dominio di dipendenza continuo** è **tutto  $\mathbf{R}$**

6

## Esempio

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t & x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \leq 0 \\ 0 & \text{per } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_x^{+\infty} e^{-\xi^2/4t} d\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$$



7

## Problema ai valori iniziali e al contorno per l'equazione del calore

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t & 0 < x < 1 \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = g(t) \quad u(1, t) = l(t) \quad t \geq 0 \end{cases} \quad \text{con } f(0) = g(0)$$

$$\Rightarrow u(x, t) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k^2 \pi^2 t} \sin(k\pi x) \left\{ \int_0^1 f(\xi) \sin(k\pi \xi) d\xi + k\pi \int_0^t e^{k^2 \pi^2 \tau} [g(\tau) - (-1)^k l(\tau)] d\tau \right\}$$

### Dominio di dipendenza continuo

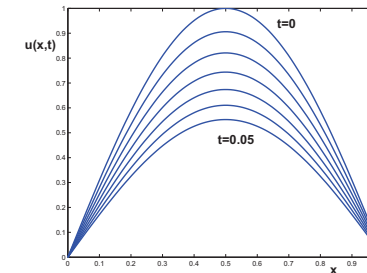
In ogni punto  $P(x, t)$  la soluzione  $u(x, t)$  **dipende** dai valori del **dato iniziale**  $f(x)$  sull'intervallo  $[0, 1]$  e dai valori delle **condizioni al bordo**  $g(t)$  e  $l(t)$  per ogni  $t \geq 0$

$\Rightarrow$  il **dominio di dipendenza continuo** è il rettangolo  $[0, 1] \times [0, t]$

## Esempio

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t & 0 < x < 1 \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(\pi x) & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = 0 \quad u(1, t) = 0 \quad t \geq 0 \end{cases}$$

$$u(x, t) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k^2 \pi^2 t} \sin k\pi x \left\{ \int_0^1 \sin \pi \xi \sin k\pi \xi d\xi \right\} = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$$

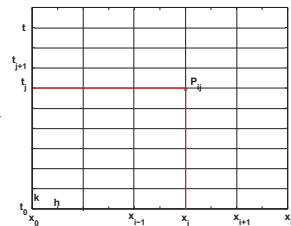


9

## Schemi numerici per l'equazione del calore

**Discretizzazione:**  $x_i = ih \quad t_j = jk$

$$R = \{(x_i, t_j), 0 \leq i \leq N+1, 0 \leq j \leq M+1\}$$



$$\Rightarrow u_{xx}(x_i, t_j) = u_t(x_i, t_j)$$

Lo **schema numerico** si ottiene sostituendo alle **derivate parziali** le approssimazioni ottenute con le **differenze finite**.

10

## Formule alle differenze finite

**Formula alle differenze finite centrate** per  $u_{xx}(x_i, t_j)$ :

$$u_{xx}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} - \underbrace{\frac{h^2}{12} u_{xxxx}(\xi_i, t_j)}_{O(h^2)}$$

$\xi_i \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$

È una formula del **secondo ordine** in  $h$

**Formula alle differenze finite in avanti** per  $u_t(x_i, t_j)$ :

$$u_t(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} + \underbrace{\frac{k}{2} u_{tt}(x_i, \eta_j)}_{O(k)}$$

$\eta_j \in [t_j, t_{j+1}]$

È una formula del **primo ordine** in  $k$

11

## Uno schema esplicito

Usando una **differenza centrata** per approssimare  $u_{xx}(x_i, t_j)$  e una **differenza in avanti** per approssimare  $u_t(x_i, t_j)$  si ottiene l'**equazione discreta**

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}$$

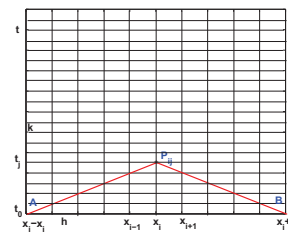
Aggiungendo le **condizioni iniziali** e **al bordo** si ottiene il seguente **schema numerico esplicito a due livelli temporali**, del **primo ordine** in  $k$  e del **secondo ordine** in  $h$ :

$$\begin{cases} u_{i,j+1} = \alpha u_{i-1,j} + (1 - 2\alpha)u_{i,j} + \alpha u_{i+1,j} & i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, M \\ u_{i,0} = f(x_i) & i = 0, 1, \dots, N + 1 \\ u_{0,j+1} = g(t_{j+1}) \quad u_{N,j+1} = l(t_{j+1}) & j = 1, 2, \dots, M \end{cases} \quad \alpha = \frac{k}{h^2}$$

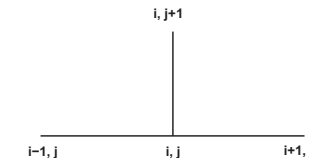
12

## Condizione necessaria di convergenza

### Dominio di dipendenza discreto



Il triangolo  $AP_{ij}B$  è detto **dominio di dipendenza discreto** di  $P_{ij}$



La **soluzione**  $u_{i,j}$  in  $P_{ij}$  dipende dai valori approssimati che cadono nel **triangolo**  $AP_{ij}B$  formato dal segmento  $[x_i - \frac{h}{k}t_j, x_i + \frac{h}{k}t_j]$  e dalle rette di coefficienti angolari  $\pm \frac{k}{h}$  passanti per  $P_{ij}$ .

**Condizione necessaria** per la **convergenza** è che per  $h, k \rightarrow 0$  il dominio di dipendenza discreto **contenga** il dominio di dipendenza continuo  $\Rightarrow \frac{k}{h} \rightarrow 0$  per  $h, k \rightarrow 0$  (se  $\alpha = \text{costante}$  si ha  $\frac{k}{h} = \alpha h \rightarrow 0$ )

13

## Condizione sufficiente per la stabilità

$$U_j = [u_{1,j}, u_{2,j}, \dots, u_{N,j}]^T \quad V_j = [u_{0,j}, 0, \dots, u_{N+1,j}]^T = [g(t_j), 0, \dots, l(t_j)]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 1-2\alpha & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & 1-2\alpha & \alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1-2\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & 1-2\alpha \end{bmatrix} \quad \text{Matrice di amplificazione}$$

Lo **schema esplicito** può essere scritto in forma vettoriale:

$$U_{j+1} = AU_j + \alpha V_j$$

**Perturbazione:**  $S_0 = [\sigma_{1,0}, \sigma_{2,0}, \dots, \sigma_{N-1,0}]^T$

$$\Rightarrow (U_{j+1} + S_{j+1}) = A(U_j + S_j) + \alpha V_j$$

$$\Rightarrow S_{j+1} = AS_j \quad j \geq 0 \Rightarrow S_j = A^j S_0 \Rightarrow \|S_j\| \leq \|A\|^j \cdot \|S_0\|$$

**Condizione sufficiente** affinché l'**errore** si mantenga **limitato** è che

$$\|A\|_1 = \|A\|_\infty \leq 1 \Rightarrow 2|\alpha| + |1 - 2\alpha| \leq 1$$

$$\alpha = \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$$

**Stabilità condizionata**

14

## Convergenza dello schema esplicito

### Equazione differenziale (esatta)

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}u)(x_i, t_j) &= u_t(x_i, t_j) - u_{xx}(x_i, t_j) = \\ &= \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} + \frac{k}{2}u_{tt}(x_i, \eta_j) - \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} + \frac{h^2}{12}u_{xxxx}(\xi_i, t_j) \end{aligned}$$

**Schema numerico** applicato alla soluzione esatta

$$(\mathcal{L}_R\{u(x_i, t_j)\})_{ij} = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} - \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2}$$

### Errore locale di troncamento

$$\tau(x_i, t_j) = (\mathcal{L}u)(x_i, t_j) - (\mathcal{L}_R\{u(x_i, t_j)\})_{ij} = O(k+h^2) \rightarrow 0 \text{ per } k, h \rightarrow 0$$

$\Rightarrow$  Lo schema è **consistente**

$\Rightarrow$  Per il **teorema di equivalenza di Lax** lo schema è **condizionatamente convergente** per  $\alpha = \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$

15

## Studio dell'errore globale

**Errore globale:**  $e_{i,j} = u(x_i, t_j) - u_{i,j}$

**Schema esatto:**

$$u(x_i, t_{j+1}) = \alpha u(x_{i-1}, t_j) + (1 - 2\alpha)u(x_i, t_j) + \alpha u(x_{i+1}, t_j) + \tau(x_i, t_j)$$

$$\Rightarrow W_{j+1} = AW_j + \alpha V_j + \underbrace{kT_j}_{\text{errore di troncamento}}$$

**Schema esplicito:**

$$u_{i,j+1} = \alpha u_{i-1,j} + (1 - 2\alpha)u_{i,j} + \alpha u_{i+1,j} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad j = 0, 1, \dots, M$$

$$\Rightarrow U_{j+1} = AU_j + \alpha V_j$$

Sottraendo le due relazioni, per l'errore  $E_j = [e_{1,j}, e_{2,j}, \dots, e_{N-1,j}]^T$  si ha

$$E_{j+1} = AE_j + kT_j = \underbrace{A^{j+1}E_0}_{\text{errore di propagazione}} + \underbrace{k \sum_{r=1}^{j+1} A^{j+1-r} T_{r-1}}_{\text{errore di troncamento}}$$

**convergenza = stabilità + consistenza**

16

## Osservazioni sullo schema esplicito

Dallo sviluppo in **serie di Taylor** si ha

$$u_t(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} - \frac{k}{2} u_{tt}(x_i, t_j) + O(k^2)$$

$$u_{xx}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} - \frac{h^2}{12} u_{xxxx}(x_i, t_j) + O(h^4)$$

Dall'equazione differenziale di ha:  $u_{tt} = (u_t)_t = (u_{xx})_t = (u_t)_{xx} = u_{xxxx}$

$\Rightarrow$  Se si sceglie  $\frac{k}{2} = \frac{h^2}{12}$ , cioè  $\alpha = \frac{1}{6}$ , lo schema ha **ordine**  $O(k^2 + h^4)$

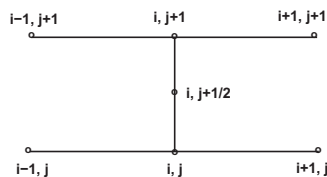
17

## Schema di Crank-Nicholson

Utilizzando le **differenze centrate**

$$u_t(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}$$

$$u_{xx}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) \approx \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{h^2} (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + \frac{1}{h^2} (u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}) \right]$$



nell'equazione  $u_t(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) = u_{xx}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}})$  si ha lo **schema numerico** seguente:

$$-\alpha u_{i-1,j+1} + 2(1+\alpha)u_{i,j+1} - \alpha u_{i+1,j+1} = \alpha u_{i-1,j} + 2(1-\alpha)u_{i,j} + \alpha u_{i+1,j}$$

È uno schema **implicito** a **due livelli** temporali, **consistente** e del **secondo ordine** sia in  $k$  che in  $h$

18

## Stabilità dello schema di Crank-Nicholson - 1

$$U_j = [u_{1,j}, u_{2,j}, \dots, u_{N,j}]^T$$

$$V_j = [u_{0,j}, 0, \dots, u_{N+1,j}]^T = [g(t_j), 0, \dots, l(t_j)]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 2(1+\alpha) & -\alpha & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha & 2(1+\alpha) & -\alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -\alpha & 2(1+\alpha) & -\alpha \\ 0 & 0 & \dots & -\alpha & 2(1+\alpha) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2(1-\alpha) & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & 2(1-\alpha) & \alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \alpha & 2(1-\alpha) & \alpha \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & 2(1-\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AU_{j+1} = BU_j + \alpha(V_{j+1} + V_j)$$

19

## Stabilità dello schema di Crank-Nicholson - 2

$$AU_{j+1} = BU_j + \alpha(V_{j+1} + V_j)$$

**Perturbazione:**  $S_0 = [\sigma_{1,0}, \sigma_{2,0}, \dots, \sigma_{N-1,0}]^T$

$$\Rightarrow A(U_{j+1} + S_{j+1}) = B(U_j + S_j) + \alpha(V_{j+1} + V_j)$$

$$\Rightarrow S_{j+1} = (A^{-1}B)S_j = CS_j \quad j \geq 0 \Rightarrow S_j = C^j S_0$$

$$\Rightarrow \|S_j\| \leq \|C\|^j \cdot \|S_0\|$$

### Condizione sufficiente

affinché l'errore si mantenga **limitato** è che  $\|C\| \leq 1$

Si dimostra che  $\|C\|_2 \leq 1$  indipendentemente dai valori di  $k$  e  $h$

$\Rightarrow$  lo schema è **incondizionatamente stabile**

$\Rightarrow$  per il **teorema di equivalenza di Lax** lo schema è **incondizionatamente convergente**

20

## Esempio

Approssimare la soluzione  $u(x, t)$  del problema differenziale

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(\pi x) & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = 0 \quad u(1, t) = 0 & t \geq 0 \end{cases} \quad u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$$

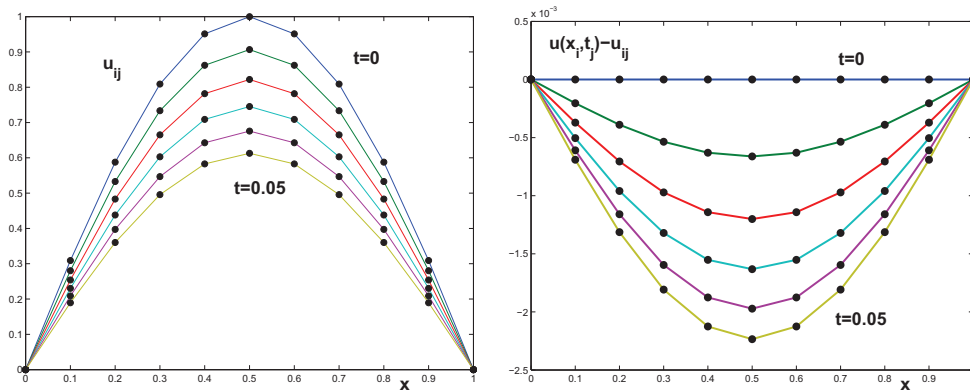
con  $h = 0.1$  e  $\alpha = 1$ .

**Discretizzazione:**  $x_i = i0.1, i = 0, 1, \dots, 10 \quad t = j0.01, j = 0, 1, \dots, 5$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad V_j = 0$$

$$AU_{j+1} = BU_j$$

21



22

## Equazioni ellittiche

Le **equazioni ellittiche** modellizzano lo stato **stazionario** di problemi descritti nello stato non stazionario da equazioni iperboliche o paraboliche.

$$a(x, y, u, u_x, u_y) u_{xx} + b(x, y, u, u_x, u_y) u_{xy} + c(x, y, u, u_x, u_y) u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$$

**Curve caratteristiche:**  $\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$   $b^2 - 4ac < 0$

$\Rightarrow$  le **direzioni caratteristiche** sono **complesse coniugate**

### Esempio

Una **membrana** perfettamente **elastica** e **omogenea**, disposta sul piano  $xy$ , è fissata con **tensione uniforme** lungo il suo contorno  $\Gamma$  ed è sottoposta a un **carico trasversale** di densità  $F$

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = -a^2 F(x, y) & (x, y) \in A \\ u(x, y) = 0 & (x, y) \in \Gamma \end{cases} \quad a: \text{costante dipendente dalle caratteristiche della membrana}$$

23

## Equazione di Poisson

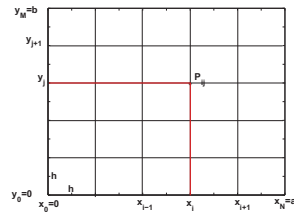
$$\Delta u(x, y) = u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = -f(x, y)$$

**Curve caratteristiche:**  $a = c = 1, b = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm i \quad x \pm iy = \text{costante}$

### Problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = -f(x, y) & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = g(x, y) & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

$$\Omega = \{(x, y), x \in (0, a), y \in (0, b)\}$$



### Problema di Neumann

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = -f(x, y) & (x, y) \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = u_x n_x + u_y n_y = g(x, y) & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

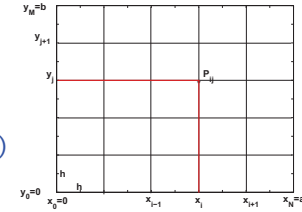
24

## Schemi numerici per l'equazione di Poisson

### Discretizzazione

$$\begin{aligned} x_i &= ih & 0 \leq i \leq N \\ y_j &= jh & 0 \leq j \leq M \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u_{xx}(x_i, y_j) + u_{yy}(x_i, y_j) = -f(x_i, y_j)$$



Lo **schema numerico** si ottiene sostituendo alle **derivate parziali** le approssimazioni ottenute con le **differenze finite**.

**Formula alle differenze finite centrate** per  $u_{xx}(x_i, y_j)$ :

$$u_{xx}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h^2} - \frac{h^2}{12} u_{xxxx}(\xi_i, y_j)$$

**Secondo ordine**  
in  $h$

**Formula alle differenze finite centrate** per  $u_{yy}(x_i, y_j)$ :

$$u_{yy}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{h^2} - \frac{h^2}{12} u_{yyyy}(x_i, \eta_j)$$

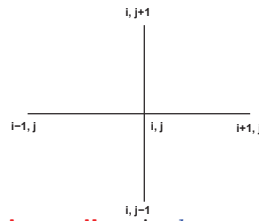
**Secondo ordine**  
in  $h$

25

## Uno schema implicito

Usando le **differenze centrate** per approssimare  $u_{xx}(x_i, y_j)$  e  $u_{yy}(x_i, y_j)$  si ottiene l'**equazione discreta**

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = -f(x_i, y_j)$$



Aggiungendo le **condizioni al bordo** si ottiene il seguente **schema numerico implicito**, del **secondo ordine** in  $h$ :

$$\begin{cases} 4u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = h^2 f(x_i, y_j) & i = 1, 2, \dots, N \\ & j = 1, 2, \dots, M \\ u_{0,j} = g(0, y_j) \quad u_{N,j} = g(N, y_j) & j = 0, 1, \dots, M + 1 \\ u_{i,0} = g(x_i, 0) \quad u_{i,M} = g(x_i, M) & i = 0, 1, \dots, N + 1 \end{cases}$$

Si tratta di un **sistema lineare** di  $NM$  equazioni nelle  $NM$  incognite  $u_{i,j}$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, M$ .

26

## Sistema lineare

Se  $N = 5$  e  $M = 4$  si ottiene il **sistema lineare**  $12 \times 12$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \\ u_{41} \\ u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \\ u_{42} \\ u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \\ u_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} + g_{10} + g_{01} \\ f_{21} + g_{20} \\ f_{31} + g_{30} \\ f_{41} + g_{51} + g_{40} \\ f_{12} + g_{20} \\ f_{22} \\ f_{32} \\ f_{42} + g_{52} \\ f_{13} + g_{03} + g_{14} \\ f_{23} + g_{24} \\ f_{33} + g_{34} \\ f_{43} + g_{44} + g_{53} \end{bmatrix}$$

$A$

$U =$

$F$

La matrice  $A$  è **tridiagonale a blocchi** e **definita positiva**

$\Rightarrow$  **metodo di Gauss-Seidel** o **metodo SOR**

27

## Consistenza dello schema implicito

Equazione differenziale (esatta):

$$(\mathcal{L}u)(x_i, y_j) = u_{xx}(x_i, y_j) + u_{yy}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h^2} + O(h^2) + \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{h^2} + O(h^2) = -f(x_i, y_j)$$

Schema numerico applicato alla soluzione esatta:

$$(\mathcal{L}_R\{u(x_i, y_j)\})_{ij} = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h^2} + \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{h^2}$$

Errore locale di troncamento

$$\tau(x_i, y_j) = (\mathcal{L}u)(x_i, y_j) - (\mathcal{L}_R\{u(x_i, y_j)\})_{ij} = -f(x_i, y_j) - (\mathcal{L}_R\{u(x_i, y_j)\})_{ij} = O(h^2) \rightarrow 0 \text{ per } h \rightarrow 0$$

⇒ Lo schema è **consistente** e del **secondo ordine**

28

## Stabilità dello schema implicito

**Teorema.** Data una qualsiasi **funzione discreta**  $V = \{v_{ij}\}_{i=0, j=0}^{N+1, M+1}$ , definita sul **reticolo**  $R \cup \partial R$  si ha

$$\max_R |V| \leq \max_{\partial R} |V| + \frac{a^2}{2} \max_R |\mathcal{L}_R V|$$

**Errore globale:**  $e_{i,j} = u(x_i, t_j) - u_{i,j}$

$$(\mathcal{L}_R\{e_{i,j}\})_{ij} = \frac{(\mathcal{L}_R\{u(x_i, y_j)\})_{ij} - (\mathcal{L}_R\{u_{i,j}\})_{ij}}{-f(x_i, y_j) - \tau(x_i, y_j)} = -\tau(x_i, y_j)$$

$$\Rightarrow \max_{(x_i, y_j) \in R} |e_{i,j}| \leq \max_{(x_i, y_j) \in \partial R} |e_{i,j}| + \frac{a^2}{2} \max_{(x_i, y_j) \in R} |(\mathcal{L}_R\{e_{i,j}\})_{ij}| = \frac{a^2}{2} \max_{(x_i, y_j) \in R} |\tau(x_i, y_j)|$$

L'**errore globale** è controllato dall'**errore di troncamento**

29

## Equazioni iperboliche

Le **equazioni iperboliche** modellizzano problemi di **trasporto** di grandezze fisiche in assenza di dissipazione (propagazione di onde elettromagnetiche, onde meccaniche, vibrazioni ...).

$$a(x, y, u, u_x, u_y) u_{xx} + b(x, y, u, u_x, u_y) u_{xy} + c(x, y, u, u_x, u_y) u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$$

**Curve caratteristiche:**  $\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$   $b^2 - 4ac > 0$

⇒ ci sono **due direzioni caratteristiche** distinte

**Esempio**

Una **corda elastica** viene perturbata dalla sua condizione di riposo, lungo l'asse  $x$ , e lasciata vibrare. Lo **spostamento normale**  $u(x, t)$  di un punto  $x$  all'istante  $t$  soddisfa l'equazione

$$\begin{cases} u_{tt} = C^2 u_{xx} & x \in \mathbf{R} & t > 0 \\ u(x, 0) = 0 & x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

30

## Equazione delle onde

$$u_{tt} = C^2 u_{xx} \quad x \in \mathbf{R} \quad t > 0$$

**Curve caratteristiche:**  $a = 1, b = 0, c = -C^2 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm C$

$$x \pm Ct = \text{costante}$$

$$\xi = x + Ct \quad \eta = x - Ct \Rightarrow \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

Integrando prima rispetto a  $\eta$  e poi rispetto a  $\xi$  si ottiene l'**integrale generale** dell'equazione delle onde

$$u(x, t) = f(x + Ct) + g(x - Ct) \quad f, g : \text{funzioni arbitrarie}$$

$u(x, t)$  è la **somma** di due segnali che si propagano con velocità  $\pm C$  mantenendo un valore **costante** lungo le curve caratteristiche. Anche le **discontinuità** si propagano lungo le curve caratteristiche.

31



## Problema ai valori iniziali per l'equazione delle onde

### Problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} = C^2 u_{xx} & x \in \mathbb{R} \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \quad u_t(x, 0) = \psi(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{condizioni iniziali}$$

$$u(x, t) = f(x + Ct) + g(x - Ct) \Rightarrow \begin{cases} u(x, 0) = f(x) + g(x) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = Cf'(x) - Cg'(x) = \psi(x) \end{cases}$$

$$f'(x) - g'(x) = \frac{1}{C} \psi(x) \Rightarrow f(x) - g(x) = \frac{1}{C} \int_0^x \psi(z) dz + A \quad A: \text{costante arbitraria}$$

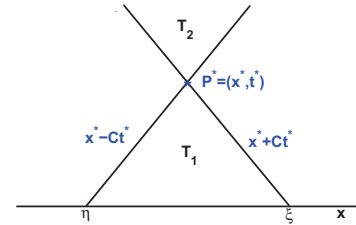
$$f(x) = \frac{1}{2} \left[ \varphi(x) + \frac{1}{C} \int_0^x \psi(z) dz + A \right] \quad g(x) = \frac{1}{2} \left[ \varphi(x) - \frac{1}{C} \int_0^x \psi(z) dz - A \right]$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + Ct) + \varphi(x - Ct)] + \frac{1}{2C} \int_{x-Ct}^{x+Ct} \psi(z) dz \quad \text{Formula di D'Alembert}$$

32

## Formula di D'Alembert

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + Ct) + \varphi(x - Ct)] + \frac{1}{2C} \int_{x-Ct}^{x+Ct} \psi(z) dz$$



Il valore della soluzione nel punto  $P^* = (x^*, t^*)$  dipende solo dai valori dei dati nell'**intervallo**  
 $I = [x^* - Ct^*, x^* + Ct^*]$   
**(intervallo di dipendenza)**

**Dominio di dipendenza continuo:** triangolo  $T_1 \Rightarrow$  Il valore della soluzione in  $P^*$  **dipende** solo dalla soluzione nei punti appartenenti al triangolo  $T_1$

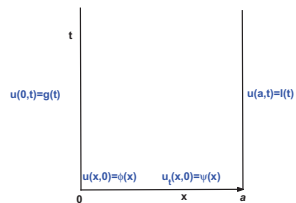
**Dominio di influenza:** triangolo  $T_2 \Rightarrow$  Il valore della soluzione in  $P^*$  **influenza** la soluzione solo nei punti appartenenti al triangolo  $T_2$

33

## Problema ai valori iniziali e ai limiti per l'equazione delle onde

$$\begin{cases} u_{tt} = C^2 u_{xx} & 0 < x < a \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \quad u_t(x, 0) = \psi(x) & 0 \leq x \leq a \end{cases} \quad \text{condizioni iniziali}$$

$$\begin{cases} u(0, t) = g(t) \quad u(a, t) = l(t) & t \geq 0 \end{cases} \quad \text{condizioni al bordo di tipo Dirichlet}$$



La soluzione è rappresentata da uno sviluppo in **serie di Fourier**.

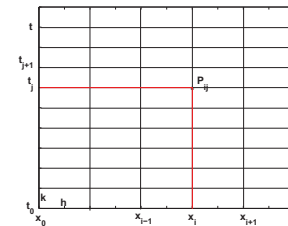
**Nota.** Per avere la **continuità** della soluzione si deve avere  $g(0) = \varphi(0)$  e  $l(0) = \varphi(a)$

34

## Schemi numerici per l'equazione delle onde

$$\begin{cases} u_{tt} - C^2 u_{xx} = 0 & 0 < x < 1 \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & 0 \leq x \leq 1 \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

**Discretizzazione:**  $x_i = ih \quad 0 \leq i \leq N + 1$   
 $t_j = jk \quad 0 \leq j \leq M + 1$



$$\Rightarrow u_{tt}(x_i, t_j) - C^2 u_{xx}(x_i, t_j) = 0$$

Lo **schema numerico** si ottiene sostituendo alle **derivate parziali** le approssimazioni ottenute con le **differenze finite**

35

## Differenze finite per $u_{tt}$ , $u_{xx}$ e $u_t$

Formula alle differenze finite centrate per  $u_{tt}(x_i, t_j)$ :

$$u_{tt}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{k^2} + O(k^2) \quad \text{Secondo ordine in } k$$

Formula alle differenze finite centrate per  $u_{xx}(x_i, t_j)$ :

$$u_{xx}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} + O(h^2) \quad \text{Secondo ordine in } h$$

Formula alle differenze finite centrate per  $u_t(x_i, 0)$ :

$$u_t(x_i, 0) = \frac{u(x_i, t_1) - u(x_i, t_{-1}))}{2k} + O(k^2) \quad \text{Secondo ordine in } k$$

36

## Schema esplicito

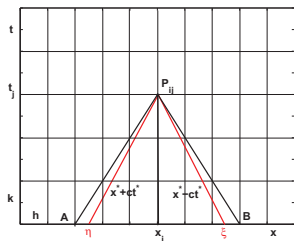
$$\begin{cases} u_{i,j+1} = 2u_{i,j} - u_{i,j-1} + C^2 \frac{k^2}{h^2} (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) & i = 1, 2, \dots, N \\ & j = 0, 1, \dots, M \\ u_{i,0} = \varphi(x_i) & i = 0, 1, \dots, N+1 \\ \frac{u_{i,1} - u_{i,-1}}{2k} = \psi(x_i) \Rightarrow u_{i,-1} = u_{i,1} - 2k\psi(x_i) & i = 1, 2, \dots, N \\ u_{0,j} = u_{N+1,j} = 0 & j = 0, 1, 2, \dots, M \end{cases}$$

È uno schema **esplicito**, del **secondo ordine** in  $k$  e  $h$ , a **due livelli** temporali. Posto  $\alpha = C \frac{k}{h}$  si ha

$$\begin{cases} u_{i,j+1} = \alpha^2 u_{i-1,j} + 2(1 - \alpha^2) u_{i,j} + \alpha^2 u_{i+1,j} - u_{i,j-1} & 1 \leq i \leq N \\ & 0 \leq j \leq M \\ u_{i,0} = \varphi(x_i) & 0 \leq i \leq N+1 \\ u_{i,-1} = \frac{1}{2} \alpha^2 [\varphi(x_{i-1}) + \varphi(x_{i+1})] + (1 - \alpha^2) \varphi(x_i) + k\psi(x_i) & 1 \leq i \leq N \\ u_{0,j} = u_{N+1,j} = 0 & 0 \leq j \leq M+1 \end{cases}$$

## Condizione necessaria di convergenza

Dominio di dipendenza discreto



Il triangolo  $AP_{ij}B$  è detto **dominio di dipendenza discreto** di  $P_{ij}$

L'**approssimazione**  $u_{i,j}$  in  $P_{ij}$  dipende dai valori approssimati che cadono nel **triangolo**  $AP_{ij}B$  formato dall'asse delle  $x$  e dalle rette di coefficiente angolare  $\pm \frac{k}{h}$  passanti per  $P_{ij}$ .

**Condizione necessaria** per la **convergenza** è che il dominio di dipendenza discreto **contenga** il dominio di dipendenza continuo

$$\Rightarrow \frac{k}{h} \leq \frac{1}{C} \Rightarrow \alpha = \frac{Ck}{h} \leq 1 \quad \text{Condizione di Courant-Friedrichs-Lewy}$$

38

## Condizione sufficiente per la stabilità

$$U_j = [u_{1,j}, u_{2,j}, \dots, u_{N,j}]^T \quad U_0 = [\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_N)]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 2(1 - \alpha^2) & \alpha^2 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha^2 & 2(1 - \alpha^2) & \alpha^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \alpha^2 & 2(1 - \alpha^2) & \alpha^2 \\ 0 & 0 & \dots & \alpha^2 & 2(1 - \alpha^2) \end{bmatrix} \quad \text{Matrice di amplificazione}$$

$$U_{-1} = \frac{1}{2} AU_0 + k\Psi \quad \Psi = [\psi(x_1), \psi(x_2), \dots, \psi(x_N)]^T$$

Lo **schema esplicito** può essere scritto in forma vettoriale:

$$U_{j+1} = AU_j - U_{j-1} \quad j = 1, 2, \dots, M$$

**Perturbazione:**  $S_0 = [\sigma_{1,0}, \sigma_{2,0}, \dots, \sigma_{N,0}]^T$

$$\Rightarrow (U_{j+1} + S_{j+1}) = A(U_j + S_j) - (U_{j-1} - U_j)$$

$$\Rightarrow S_{j+1} = AS_j - S_{j-1} \quad 0 \leq j \leq M$$

39

**Sistema alle differenze:**  $S_{j+1} = AS_j - S_{j-1} \quad 0 \leq j \leq M$

La soluzione è  $S_j = \beta^j Q$  con  $AQ = \frac{\beta^2 + 1}{\beta} Q = \lambda Q$

**Condizione sufficiente** affinché l'**errore** si mantenga **limitato** è che

$$|\beta| = \left| \frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - 1} \right| \leq 1 \Rightarrow |\lambda| < 2$$

Per gli autovalori di  $A$  si ha  $\lambda_i = 2 - 4\alpha^2 \sin^2 \frac{i\pi}{2(N+1)} \quad 1 \leq i \leq N$

$\Rightarrow$   $\alpha = \frac{Ck}{h} \leq 1$  **Stabilità condizionata**

40

## Convergenza dello schema esplicito

**Equazione differenziale esatta:**

$$(\mathcal{L}u)(x_i, t_j) = u_{tt}(x_i, t_j) - C^2 u_{xx}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{k^2} + O(k^2) - C^2 \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} + O(h^2) = 0$$

**Schema numerico** applicato alla soluzione esatta:

$$(\mathcal{L}_R\{u(x_i, t_j)\})_{ij} = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{k^2} - C^2 \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2}$$

**Errore locale di troncamento**

$$\tau(x_i, t_j) = (\mathcal{L}u)(x_i, t_j) - (\mathcal{L}_R\{u(x_i, t_j)\})_{ij} = O(k^2 + h^2) \rightarrow 0 \text{ per } k, h \rightarrow 0$$

$\Rightarrow$  Lo schema è **consistente** e del **secondo ordine**

$\Rightarrow$  Per il **teorema di equivalenza di Lax** lo schema è **condizionatamente convergente**

41

### Riferimenti bibliografici

L. Gori, *Calcolo Numerico*: §10