

ANALISI NUMERICA
CALCOLO NUMERICO
(A.A. 2012-2013)

Prof. F. Pitolli

Appunti delle lezioni sulle equazioni
alle derivate parziali del primo ordine

Equazioni alle derivate parziali

Un'equazione differenziale alle derivate parziali è una relazione che lega una funzione incognita $u(x_1, \dots, x_r)$ alle sue derivate parziali.

Caso particolare: $u = u(x, y)$

Equazioni del primo ordine: $F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$

Equazioni del secondo ordine: $F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) = 0$

Equazioni quasi-lineari:

Primo ordine: $a(x, y, u) u_x + b(x, y, u) u_y = f(x, y, u)$

(se a, b sono funzioni solo di x e y e f è lineare in u
l'equazione è lineare)

Secondo ordine:

$a(x, y, u, u_x, u_y) u_{xx} + b(x, y, u, u_x, u_y) u_{xy} + c(x, y, u, u_x, u_y) u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$

(se a, b sono funzioni solo di x e y e f è lineare in u, u_x, u_y
l'equazione è lineare)

1

Problemi ai valori iniziali

In alcuni casi il problema differenziale descrive l'evoluzione nel tempo di un fenomeno fisico ed è completato dalle condizioni iniziali.

$$\begin{cases} a(x, t, u) u_x + b(x, t, u) u_t = f(x, t, u) & x \in \mathbb{R} \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{Condizioni iniziali}$$

Esempio: equazione del trasporto

$$u_t + c u_x = 0 \quad x \in \mathbb{R} \quad t > 0$$

Soluzione (o integrale generale): $u(x, t) = \gamma(x - ct)$

Nota. L'integrale generale dipende da funzioni arbitrarie.

Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t + c u_x = 0 & x \in \mathbb{R} \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{Condizioni iniziali}$$

Soluzione del problema di Cauchy: $u(x, t) = \varphi(x - ct)$

2

Problemi al bordo

Nei casi di interesse applicativo $u(x, t)$ verifica l'equazione differenziale per $t > 0$ e $a < x < b$ e soddisfa, oltre alle condizioni iniziali, le condizioni al bordo (o ai limiti) per $x = a$ e $x = b$.

$$\begin{cases} a(x, t, u) u_{xx} + b(x, t, u) u_{xt} + c(x, t, u) u_{tt} = f(x, t, u) & a < x < b, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & a \leq x \leq b & \text{Condizioni iniziali} \\ u(a, t) = \rho(t) \quad u(b, t) = \sigma(t) & t \geq 0 & \text{Condizioni al bordo} \end{cases}$$

Esempio: equazione della propagazione del calore

$$\begin{cases} u_t = \frac{k}{RC} u_{xx} & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = T_0 & 0 \leq x \leq L \\ u(t, 0) = u(t, L) = T_1 & t > 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L: \text{ lunghezza del filo} \\ k: \text{ conduttività termica} \\ R: \text{ densità} \\ C: \text{ calore specifico} \end{array}$$

3

Problemi stazionari

Nel caso di fenomeni **stazionari** $u(x, y)$ verifica l'equazione differenziale in un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e soddisfa **condizioni al bordo** sulla **frontiera** di Ω , $\partial\Omega$.

$$\begin{cases} a(x, y, u) u_{xx} + b(x, y, u) u_{xy} + c(x, y, u) u_{yy} = f(x, y, u) & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = \psi(x, y) & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad \text{Condizioni al bordo}$$

Esempio: equazione di Poisson

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = f(x, y) & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = 0 & (x, y) \in \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

4

Linee caratteristiche per le equazioni del primo ordine

Si cerca la soluzione $u(x, y)$ del **problema di Cauchy**

$$\begin{cases} F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \\ u(\alpha(\tau), \beta(\tau)) = \varphi(\tau) \quad \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1 \end{cases}$$

dove $x = \alpha(\tau)$ e $y = \beta(\tau)$ sono le **equazioni parametriche** di una curva Γ assegnata.

\Rightarrow Si cerca una **superficie integrale** che passi per la **curva** \mathcal{C} (dello spazio (x, y, u)) di equazione

$$x = \alpha(\tau) \quad y = \beta(\tau) \quad u = \varphi(\tau)$$

5

Linee caratteristiche per le equazioni quasi-lineari del primo ordine

Problema di Cauchy $\begin{cases} a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = f(x, y, u) & (a \neq 0) \\ u(\alpha(\tau), \beta(\tau)) = \varphi(\tau) & \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1 \end{cases}$

Se φ è **derivabile** $\Rightarrow \frac{d}{d\tau} u(\alpha(\tau), \beta(\tau)) = \alpha'(\tau)u_x + \beta'(\tau)u_y = \varphi'(\tau)$

Per poter calcolare u_x e u_y su Γ bisogna risolvere il **sistema lineare**:

$$\Rightarrow \begin{cases} a(\alpha(\tau), \beta(\tau), u)u_x + b(\alpha(\tau), \beta(\tau), u)u_y = f(\alpha(\tau), \beta(\tau), u) \\ \alpha'(\tau)u_x + \beta'(\tau)u_y = \varphi'(\tau) \end{cases} \quad \text{su } \Gamma$$

che ammette soluzione **solo se** $D = \det \begin{bmatrix} a & b \\ \alpha' & \beta' \end{bmatrix} \neq 0$

Linee caratteristiche: sono le **curve** lungo le quali $D = a\beta' - b\alpha' = 0$

\Rightarrow se si assegnano le condizioni iniziali sulle linee caratteristiche il problema di Cauchy è **impossibile** o **indeterminato**

6

Equazioni quasilineari del 1° ordine

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = f(x, y, u)$$

Curve caratteristiche: $a \frac{\beta'}{\frac{dy}{d\tau}} - b \frac{\alpha'}{\frac{dx}{d\tau}} = 0 \Rightarrow \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y, u)}{a(x, y, u)}$

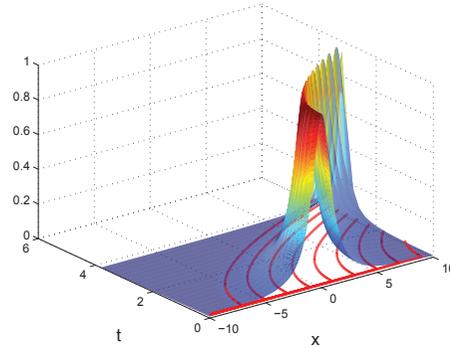
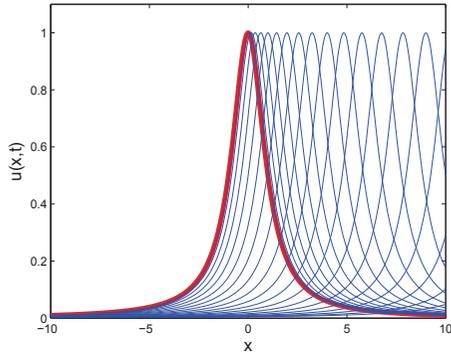
Esempio

$$\begin{cases} u_t + 2tu_x = 0 & x \in \mathbb{R} \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2} & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \begin{aligned} \Gamma &= \{x = t^2 + \text{costante}\} \\ &\Rightarrow u(x, t) = \frac{1}{1 + (x - t^2)^2} \\ u(x, t)|_{\Gamma} &= \frac{1}{1 + (\text{costante})^2} \end{aligned}$$

Nota. Se l'equazione ha coefficienti a e b **costanti** le **curve caratteristiche** sono **rette** con coefficiente angolare $\frac{b}{a}$:

$$y - \left(\frac{b}{a}\right)x = \text{costante}$$

7



8

Equazione del trasporto

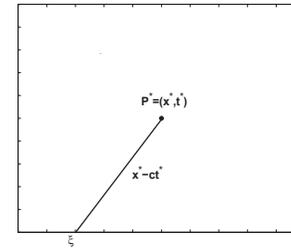
$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 & x \in \mathbb{R} \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Curve caratteristiche: $\Gamma : x - ct = \text{costante} \Rightarrow u(x, t) = \varphi(x - ct)$

Lungo le curve caratteristiche la soluzione u assume un valore **costante**

$$x - ct = \xi \Rightarrow u(x, t)|_{\Gamma} = u(\xi + ct, t) = \varphi(\xi) = \varphi(x - ct)$$

Dominio di dipendenza continuo



Il segmento P^*C è detto **dominio di dipendenza continuo** di P^* : la soluzione nel punto $P^* = (x^*, t^*)$ è

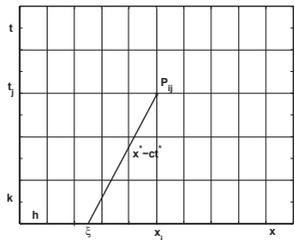
$$u(x^*, t^*) = \varphi(x^* - ct^*) = \varphi(\xi_g^*)$$

Schemi numerici per l'equazione del trasporto

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 & x \in \mathbb{R} \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & x \in \mathbb{R} \\ u(0, t) = \psi(t) & t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow u(x, t) = \varphi(x - ct)$$

Nota. Per avere continuità deve essere $\varphi(0) = \psi(0)$

Discretizzazione: $x_i = ih \quad t_j = jk \quad 0 \leq i \leq N+1 \quad 0 \leq j \leq M+1$



$$R = \{(x_i, t_j), 0 \leq i \leq N+1, 0 \leq j \leq M+1\}$$

$$\Rightarrow u_t(x_i, t_j) + cu_x(x_i, t_j) = 0$$

Lo **schema numerico** si ottiene sostituendo alle **derivate parziali** le approssimazioni ottenute con le **differenze finite**

10

Formula alle differenze finite per u_x e u_t

Se u ammette derivate parziali continue fino al secondo ordine può essere sviluppata in **serie di Taylor** di ordine 2

$$u(x_i, t_{j+1}) = u(x_i, t_j) + k u_t(x_i, t_j) + \frac{k^2}{2} u_{tt}(x_i, \eta_j) \quad \eta_j \in [t_j, t_{j+1}]$$

$$u(x_{i-1}, t_j) = u(x_i, t_j) - h u_x(x_i, t_j) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(\xi_i, t_j) \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

Formula alle differenze finite in avanti per $u_t(x_i, t_j)$:

$$u_t(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} + \underbrace{\frac{k}{2} u_{tt}(x_i, \eta_j)}_{O(k)} \quad \text{Primo ordine in } k$$

Formula alle differenze finite indietro per $u_x(x_i, t_j)$:

$$u_x(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{h} + \underbrace{\frac{h}{2} u_{xx}(\xi_i, t_j)}_{O(h)} \quad \text{Primo ordine in } h$$

11

Schema numerico

Sostituendo nell'equazione

$$u_t(x_i, t_j) + c u_x(x_i, t_j) = 0$$

le **approssimazioni** delle derivate parziali si ricava la relazione esatta

$$\frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} + \frac{k}{2} u_{tt}(x_i, \eta_j) + c \left[\frac{u(x_i, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{h} + \frac{h}{2} u_{xx}(\xi_i, t_j) \right] = 0$$

Lo schema numerico si ottiene sostituendo $u(x_i, t_j)$ con l'**approssimazione** u_{ij} e trascurando l'**errore**:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} + c \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} = 0$$

12

Schema upwind

Aggiungendo le **condizioni iniziali** e **al bordo** si ottiene il seguente **schema numerico**, chiamato **schema upwind**:

$$\begin{cases} u_{i,j+1} = (1 - \alpha)u_{i,j} + \alpha u_{i-1,j} & i = 1, 2, \dots, N \quad j = 0, 1, \dots, M \\ u_{i,0} = \varphi(x_i) & i = 0, 1, \dots, N + 1 \\ u_{0,j} = \psi(t_j) & j = 0, 1, \dots, M \end{cases}$$

$$\alpha = c \frac{k}{h}$$

Numero di Courant

- Si tratta di uno schema
- del **primo ordine** in x e t
 - **esplicito**
 - a **due livelli temporali**

13

Convergenza

Uno schema numerico è **convergente** se

$$\max_{(x_i, t_j) \in R} |e(x_i, t_j)| = \max_{(x_i, t_j) \in R} |u(x_i, t_j) - u_{i,j}| \rightarrow 0 \text{ per } h, k \rightarrow 0$$

Teorema di equivalenza di Lax. Dato un problema differenziale lineare con c.i. e c.b. ben posto, **condizione necessaria e sufficiente** di **convergenza** di uno schema alle differenze è che lo schema sia **consistente** e **stabile**

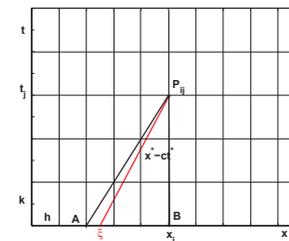
Consistenza: l'**errore locale di troncamento** $\rightarrow 0$ per $h, k \rightarrow 0$

Stabilità : l'**accumularsi** degli errori locali di troncamento si mantiene **limitato** per $h, k \rightarrow 0$ e t fissato

14

Condizione necessaria di convergenza

Dominio di dipendenza discreto



Il triangolo $AP_{ij}B$ è detto **dominio di dipendenza discreto** di P_{ij}

La **soluzione** $u_{i,j}$ in P_{ij} dipende dai valori approssimati che cadono nel **triangolo** $AP_{ij}B$ formato dall'asse delle x , dalla retta che congiunge $(x_i, 0)$ e P_{ij} e dalla retta di coefficiente angolare $\frac{k}{h}$ passante per P_{ij} .

Condizione necessaria per la **convergenza** è che il dominio di dipendenza discreto **contenga** il dominio di dipendenza continuo

$$\Rightarrow \frac{k}{h} \leq \frac{1}{c} \Rightarrow \alpha = \frac{ck}{h} \leq 1 \quad \text{Condizione di Courant-Friedrichs-Lewy}$$

15

Condizione sufficiente per la stabilità

$$U_j = [u_{1,j}, u_{2,j}, \dots, u_{N,j}]^T \quad V_j = [u_{0,j}, 0, \dots, 0]^T = [\psi(t_j), 0, \dots, 0]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 1-\alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & 1-\alpha & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & 1-\alpha \end{bmatrix} \quad \text{Matrice di amplificazione}$$

Lo **schema upwind** può essere scritto in forma vettoriale:

$$U_{j+1} = AU_j + \alpha V_j$$

Perturbazione: $S_0 = [\sigma_{1,0}, \sigma_{2,0}, \dots, \sigma_{N,0}]^T$

$$\Rightarrow (U_{j+1} + S_{j+1}) = A(U_j + S_j) + \alpha V_j$$

$$\Rightarrow S_{j+1} = AS_j \quad j \geq 0 \Rightarrow S_j = A^{j+1} s_0 \Rightarrow \|S_j\| \leq \|A\|^j \cdot \|S_0\|$$

Condizione sufficiente affinché l'**errore** si mantenga **limitato** è che

$$\|A\|_1 = \|A\|_\infty \leq 1 \Rightarrow |\alpha| + |1-\alpha| \leq 1$$

$$\alpha = \frac{ck}{h} \leq 1$$

Stabilità condizionata

16

Convergenza dello schema upwind

$$(\mathcal{L}u)(x_i, t_j) = u_t(x_i, t_j) + cu_x(x_i, t_j) =$$

$$= \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} + O(k) + c \frac{u(x_i, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{h} + O(h)$$

Equazione differenziale (esatta)

$$(\mathcal{L}_R \{u(x_i, t_j)\})_{ij} = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} + c \frac{u(x_i, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{h}$$

Schema numerico applicato alla soluzione esatta

Errore locale di troncamento

$$\tau(x_i, t_j) = (\mathcal{L}u)(x_i, t_j) - (\mathcal{L}_R \{u(x_i, t_j)\})_{ij} = O(k+h) \rightarrow 0 \text{ per } k, h \rightarrow 0$$

\Rightarrow Lo schema è **consistente** e del **primo ordine** in x e t

\Rightarrow Per il **teorema di equivalenza di Lax** lo schema è **condizionatamente convergente**

Nota. Lo schema è **esatto** per tutti i **polinomi bilineari** in x e t .

Studio dell'errore globale

Errore globale: $e_{i,j} = u(x_i, t_j) - u_{i,j}$

Schema esatto: $u(x_i, t_{j+1}) = (1-\alpha)u(x_i, t_j) + \alpha u(x_{i-1}, t_j) + k\tau(x_i, t_j)$

$$\Rightarrow W_{j+1} = AW_j + \alpha V_j + kT_j \quad \begin{aligned} W_j &= [u(x_1, t_j), \dots, u(x_N, t_j)]^T \\ V_j &= [u(x_0, t_j), 0, \dots, 0, u(x_{N+1}, t_j)]^T \\ T_j &= [\tau(x_1, t_j), \dots, \tau(x_N, t_j)]^T \end{aligned}$$

Schema upwind: $u_{i,j+1} = (1-\alpha)u_{i,j} + \alpha u_{i-1,j}$

$$\Rightarrow U_{j+1} = AU_j + \alpha V_j$$

Sottraendo le due relazioni, per l'errore $E_j = [e_{1,j}, e_{2,j}, \dots, e_{N,j}]^T$ si ha

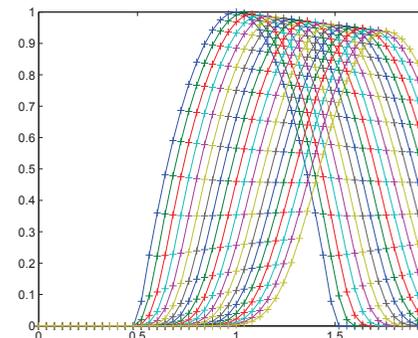
$$E_{j+1} = AE_j + kT_j = \underbrace{A^{j+1}E_0}_{\text{errore di propagazione}} + \underbrace{k \sum_{r=1}^{j+1} A^{j+1-r} T_{r-1}}_{\text{errore di troncamento}}$$

convergenza = stabilità + consistenza

18

Esempio

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0 & x \in \mathbb{R} \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} - x\right) \left(x - \frac{3}{2}\right) & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \\ u(0, t) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$



Soluzione approssimata per $k = 0.02$ e $h = 0.04$

\Downarrow
Numero di Courant:
 $\alpha = \frac{1}{2}$

19

Function MATLAB

```
function [u] = PDE_upwind(numCFL,M,N,u0,g0)
%
% u = PDE_upwind(numCFL,M,N,u0,g0): risolve l'equazione del trasporto
%                                     con il metodo upwind
%
% numCFL: numero di Courant-Friedrichs-Lewy
% M: numero di passi temporali
% N+1: numero di nodi
% u0: condizione iniziale
% g0: condizione al bordo
% u: soluzione approssimata

u = zeros(N+1,M+1);
u(:,1) = u0;
u(1,:) = g0;
for j = 1:M
    for i = 2:N+1
        u(i,j+1) = (1-numCFL)*u(i,j)+numCFL*u(i-1,j);
    end
end
```

20

Altri schemi espliciti

Usando le **differenze finite centrate** si ottengono gli schemi seguenti.

Metodo leapfrog: $u_{i,j+1} = u_{i,j-1} - \alpha(u_{i+1,j} - u_{i-1,j})$

Metodo di Lax-Wendroff:

$$u_{i,j+1} = (1 - \alpha^2)u_{i,j} - \frac{1}{2}\alpha(1 - \alpha)u_{i+1,j} + \frac{1}{2}\alpha(1 + \alpha)u_{i-1,j}$$

Errore locale di troncamento: $\tau(x_i, y_j) = O(k^2 + h^2)$

I due schemi sono **consistenti**, del **secondo ordine** e **condizionatamente stabili** se $\alpha < 1$ \Rightarrow i due schemi sono **convergenti**

21

Schemi impliciti

Sono schemi in cui la soluzione approssimata è ottenuta risolvendo ad ogni passo temporale un **sistema lineare**.

Esempio. Utilizzando le **differenze finite all'indietro** per approssimare sia u_t che u_x si ha

$$\frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{k} + \frac{k}{2}u_{tt}(x_i, \eta_j) + c \frac{u(x_i, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{h} + \frac{h}{2}u_{xx}(\xi_i, t_j) = 0$$

$$\eta_j \in [t_{j-1}, t_j] \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

Schema numerico: $(1 + \alpha)u_{i,j} - \alpha u_{i-1,j} = u_{i,j-1}$

Si tratta di uno schema del **primo ordine** in x e t , **implicito**, a **due livelli temporali**.

22

Convergenza dello schema implicito

$$\Rightarrow AU_{j+1} + \alpha V_{j+1} = U_j \quad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 1 + \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha & 1 + \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 + \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\alpha & 1 + \alpha \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow E_{j+1} = A^{-1}E_j$$

Lo schema è **consistente**, del **primo ordine** e **incondizionatamente stabile** in quanto si può dimostrare che

$$\|A^{-1}\|_1 = \|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{1 + \alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k = 1 \quad \beta = \frac{\alpha}{1 + \alpha}$$

independentemente da k e h

\Rightarrow lo schema è **incondizionatamente convergente**

23

Schema di Crank-Nicholson

Utilizzando le **differenze finite centrate**

$$u_t(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) \simeq \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}$$

$$u_x(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) \simeq \frac{u_{i+1,j+1/2} - u_{i-1,j+1/2}}{2h} \simeq \frac{1}{2h} \left[\frac{1}{2}(u_{i+1,j} + u_{i+1,j+1}) - \frac{1}{2}(u_{i-1,j} + u_{i-1,j+1}) \right]$$

nell'equazione $u_t(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) + c u_x(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) = 0$

si ha lo **schema numerico** seguente:

$$u_{i,j+1} - u_{i,j} = -\frac{\alpha}{4}(u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j} - u_{i-1,j})$$

Lo schema è **consistente**, del **secondo ordine** e **incondizionatamente stabile** \Rightarrow lo schema è **incondizionatamente convergente**

24

Sistema lineare

Per ogni $j > 1$, l'approssimazione $U_{j+1} = [u_{1,j+1}, \dots, u_{N,j+1}]^T$ al tempo t_{j+1} si ottiene risolvendo il **sistema lineare**

$$-\frac{\alpha}{4}u_{i-1,j+1} + u_{i,j+1} + \frac{\alpha}{4}u_{i+1,j+1} = \frac{\alpha}{4}u_{i-1,j} + u_{i,j} - \frac{\alpha}{4}u_{i+1,j} \quad 1 \leq i \leq N$$

\Downarrow

$$AU_{j+1} = A^T U_j + \frac{\alpha}{4} V_j$$

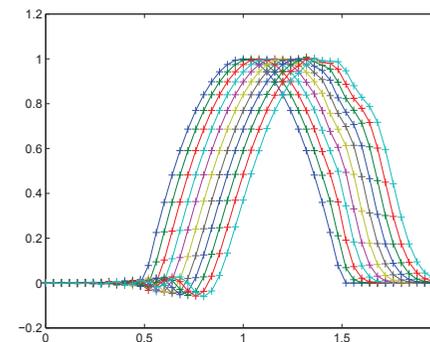
dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\alpha}{4} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{\alpha}{4} & 1 & \frac{\alpha}{4} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha}{4} & 1 & \frac{\alpha}{4} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & -\frac{\alpha}{4} & 1 & \frac{\alpha}{4} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & -\frac{\alpha}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

25

Esempio

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0 & x \in \mathbb{R} \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} - x\right) \left(x - \frac{3}{2}\right) & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \\ u(0, t) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$



Soluzione approssimata per $k = 0.02$ e $h = 0.04$

\Downarrow

Numero di Courant:
 $\alpha = \frac{1}{2}$

26

Riferimenti bibliografici

L. Gori, *Calcolo Numerico*: §10