Calcolo di limiti - 2

Calcolare i seguenti limiti:

1 $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\pi}{2}+\tan x-\arctan\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\log x}}$ Suggerimento: dimostrare che per ogni $x>0$ si ha

$$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\,.$$

2 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2n^2+n^2\cos n}$

3 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2n!}{3^{n^2}}$

4 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2n!}{3^{2n}}$

5 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\log n+3^n-n^3}$

6 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2-n!}{3-n!}\right)^{(n+2)!}$

7 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n!-1}{n!+2}\right)^{\log 5n}$

8 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2e^{3n}n!+\sin(n!)}{n^n+e^{3n}}$

9 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{(\log n)^3}+e^{(\log n)^2}}{1+(\log n)^n}$

10 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2 2^n}{(n+1)!}$

11 (*) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!}$

12 Mostrare che la funzione $f(x)=(1+|\operatorname{sen} x|)^{-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}$ è infinitesima di ordine superiore a $|x|^k$ per $x\to0$, qualunque sia $k>0$.

13 Ordinare i seguenti infiniti, per $x\to0^+$:

$$f(x)=\frac{\ln\left(1-\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)}{x^2}\,,$$

$$g(x)=\log_2\left(3+\frac{1}{x^4}+2^{1/x}\right)\,,$$

$$h(x)=\frac{\pi-2\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}}{\operatorname{sen}^4 x}\,.$$

14 Ordinare per ordine crescente di infinito (per $x\to+\infty$) le seguenti funzioni:

$$f(x)=(1+\sqrt{x})^{\pi}\,,$$
$$g(x)=x\ln(x+5)\,,$$
$$h(x)=x^{\arctan(\ln(\ln x))}\,.$$

15 Ordinare i seguenti infinitesimi, per $x\to+\infty$:

$$f(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{2x^2+\sqrt{x}}\,;\qquad g(x)=\sqrt{9x^4+5}-3x^2\,;$$

$$h(x)=x^{1-\log x}\,;\qquad k(x)=\frac{1}{2\cos x+x^2\log(2^x+7)}\,.$$

16 Ordinare per ordine decrescente di infinito, per $x\to+\infty$, le seguenti funzioni:

$$f(x)=e^{\frac{x^2+1}{\sqrt{x-2}}}\,,\qquad g(x)=2^{\frac{4(1-\cos(1/x))}{\ln(1+x^{-7/2})}}\,,$$

$$h(x)=x^{2x}\,,\qquad k(x)=\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^{x^2}\,.$$

---

17 Calcolare l'ordine di infinito o infinitesimo della seguente funzione, al variare di $\alpha>0$:

$$\frac{\operatorname{arctg} x^{\alpha}+5x^4}{x+3x^3}\,.$$

---

18 Supponiamo che $\lim_{n\to+\infty}a_{2n}\neq\lim_{n\to+\infty}a_{2n-1}$. Cosa si può concludere su $\lim_{n\to+\infty}a_n$?

19 Supponiamo che $\{a_{2n}\}$ e $\{a_{2n-1}\}$ siano crescenti. Si può concludere che $\lim_{n\to+\infty}a_n$ esiste?

20 Supponiamo che $\lim_{n\to+\infty}a_{2n}=l\in\mathbb{R}$. Quali delle seguenti affermazioni sulla successione $\{a_{n^2}\}$ sono vere, e perché?

a) $\lim_{n\to+\infty}a_{n^2}=l$;

b) $\lim_{n\to+\infty}a_{n^2}=\left(\frac{l}{2}\right)^2$;

c) $\lim_{n\to+\infty}a_{n^2}$ non necessariamente esiste, ma se esiste è pari a l;

d) $\lim_{n\to+\infty}a_{n^2}$ non necessariamente esiste, e se esiste può assumere anche valori distinti da l.

21 Data la successione $a_n=[(-1)^n+1]\dfrac{n}{\log n}$, $n\geq2$, determinarne l'estremo superiore e inferiore e stabilire se la successione ammette limite.

Mediante un appropriato uso del teorema "ponte", provare che i seguenti limiti non esistono:

22 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\cos^4(5x)\,.$

23 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x+1}\operatorname{sen}(3x)\,.$

24 $\displaystyle\lim_{x\to0^-}(3x+1)\operatorname{tg}\frac{2}{x^2}\,.$

1 Risposte ad alcuni esercizi

1: e; **2:** 1; **3:** 0; **4:** $+\infty$; **5:** 3; **6:** $+\infty$; **7:** 1; **8:** $+\infty$; **9:** 0; **10:** 0; **11:** $+\infty$; **14:** g, k, h, f; **15:** $h(x)$ è l'infinitesimo di ordine più alto, poi seguono $k(x)$, $g(x)$, $f(x)$; **16:** g, f, k, h; **17:** Infinitesimo di ordine 3 se $\alpha \geq 4$, infinitesimo di ordine $\alpha - 1$ se $1 < \alpha < 4$, tende a 1 per $\alpha = 1$, infinito di ordine $1 - \alpha$ se $0 < \alpha < 1$; **18:** che non esiste l; **19:** no, ad esempio $a_{2n+1} = \dfrac{n}{n+1}, a_{2n} = n$; **20:** a) in generale è falso; b) in generale è falso; c) vero; d) falso; **21:** $\sup a_n = +\infty$, $\inf a_n = 0$, non ammette limite;