CALCOLO DELLE PROBABILITA'
19–10-2021
Proff. Beghin - Orsingher

Nome:............................ **Cognome:**.................................. **Matricola:**...............................

E1) Gli abitanti di un comune si recano in un ufficio comunale, durante la settimana, nei seguenti giorni e con le seguenti frequenze

Lunedì	30%	Lunedì o mercoledì	50%
Mercoledì	40%	Lunedì o venerdì	60%
Venerdì	50%	Mercoledì o venerdì	70%

Se la probabilità che si rechino nell'ufficio in tutti e 3 i giorni della settimana è pari ad un terzo della probabilità che vi si rechino o il lunedì o il mercoledì o il venerdì, calcolare

i) quest'ultima probabilità

ii) la probabilità che si rechino nell'ufficio solo il lunedì

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

L = "lunedì"
M = "mercoledì"
V = "venerdì"

$P(L)=0,3 \quad P(M)=0,4 \quad P(V)=0,5$

$P(L\cup M)=0,5 \quad P(M\cup L)=0,6 \quad P(M\cup V)=0,7$

i)

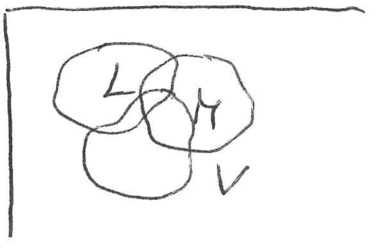
$$P(L\cup M\cup V) = P(L)+P(M)+P(V)-P(L\cap M)-P(M\cap V)-P(L\cap V) + \underbrace{P(L\cap M\cap V)}_{=\frac{1}{3}P(L\cup M\cup V)}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}P(L\cup M\cup V) = 0,3+0,4+0,5-P(L\cap M)-P(M\cap V)-P(L\cap V)$$

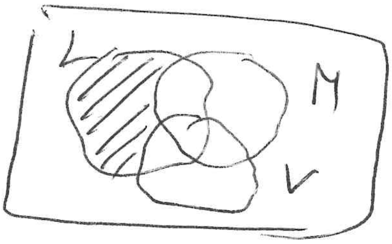
ma
$$P(L\cap M) = P(L)+P(M)-P(L\cup M)=0,2$$
$$P(M\cap V) = P(M)+P(V)-P(M\cup V)=0,2$$
$$P(L\cap V) = P(L)+P(V)-P(L\cup V)=0,2$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}P(L\cup M\cup V) = 1,2-0,6=0,6$$

$$\boxed{P(L\cup M\cup V)=0,9}$$



ii) $\boxed{P(L \cap M^c \cap V^c)}$



$$= P(L) - P(L \cap M) - P(L \cap V) + P(L \cap M \cap V)$$

$$= 0{,}3 - 0{,}2 - 0{,}2 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}9$$

$$= \boxed{0{,}2}$$

Nome:............................ **Cognome:**.................................. **Matricola:**...............................

E2) Siano X e Y una v.a. indipendenti, assolutamente continue, con densità $f_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$ e $f_Y(y)$, $y \in \mathbb{R}$, rispettivamente.

i) Trovare la funzione di ripartizione di

$$W = \frac{Y}{X}$$

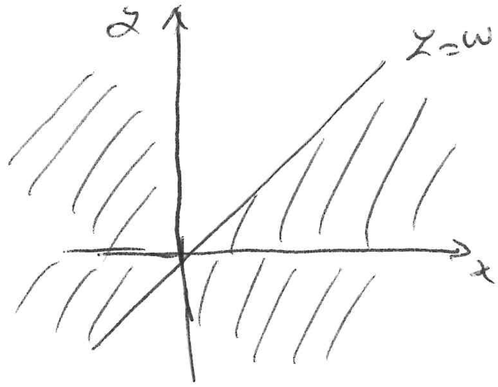
ii) Trovare la funzione di densità di W.

iii) Se $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ sono simmetriche, come si semplifica la densità di W? Calcolare, sotto questa ipotesi il $\mathbb{E}W^2$.

iv) Trovare la funzione di densità di W, se X e Y sono normali standard.

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

i) se $w>0$



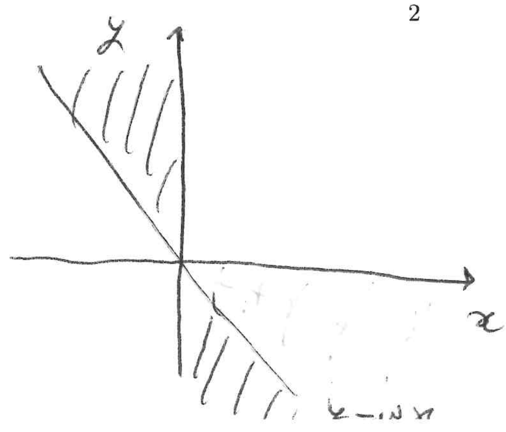
$$F_W(w) = P(W<w) = P(Y<wX) = P(X<0, Y<0) + P(X>0, Y<0)$$

$$+ \int_0^{+\infty} f_X(x) \int_0^{wx} f_Y(z)\,dz\,dx + \int_{-\infty}^0 f_X(x) \int_{wx}^{+\infty} f_Y(z)\,dz$$

$$= \int_{-\infty}^0 f_X(x)\,dx \int_{-\infty}^0 f_Y(z)\,dz + \int_0^{+\infty} f_X(x)\,dx \int_{-\infty}^0 f_Y(z)\,dz +$$

$$+ \int_0^{+\infty} f_X(x) \int_0^{wx} f_Y(y)\,dz + \int_{-\infty}^0 f_X(x) \int_{wx}^{+\infty} f_Y(z)\,dz$$

se $w<0$



$$F_W(w) = \int_{-\infty}^0 f_X(x)\,dx \int_{wx}^{+\infty} f_Y(z)\,dz$$

$$+ \int_0^{+\infty} f_X(x)\,dx \int_{-\infty}^{wx} f_Y(z)\,dz$$

ii) per $w \in \mathbb{R}$ $\quad f_W(w) = \int_0^{+\infty} x\, f_X(x)\, f_Y(wx)\, dx - \int_{-\infty}^{0} x\, f_X(x)\, f_Y(wx)\, dx$

iii) se X e Y sono simmetriche

$$f_W(w) = 2\int_0^{+\infty} x\, f_X(x)\, f_Y(wx)\, dx \qquad w \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{E} W^2 = \int_0^{+\infty} w^2 \left(2\int_0^{+\infty} x\, f_X(x)\, f_Y(wx)\, dx \right) dw$$

$$= 2\int_0^{+\infty} x\, f_X(x) \int_0^{+\infty} w^2 f_Y(wx)\, dw\, dx$$

iv) se $X, Y \sim N(0,1)$

$$f_W(w) = 2\int_0^{+\infty} \frac{x\, e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \; \frac{e^{-\frac{w^2x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} x\, e^{-\frac{x^2}{2}(1+w^2)}\, dx \cdot \frac{(1+w^2)}{1+w^2}$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+w^2} \left[e^{-\frac{x^2}{2}(1+w^2)} \right]_{x=0}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+w^2}$$

$W \sim$ Cauchy