

Esame scritto di Fisica per Scienze Biologiche – 12 Luglio 2021
Proff. Betti, Maoli, Schneider

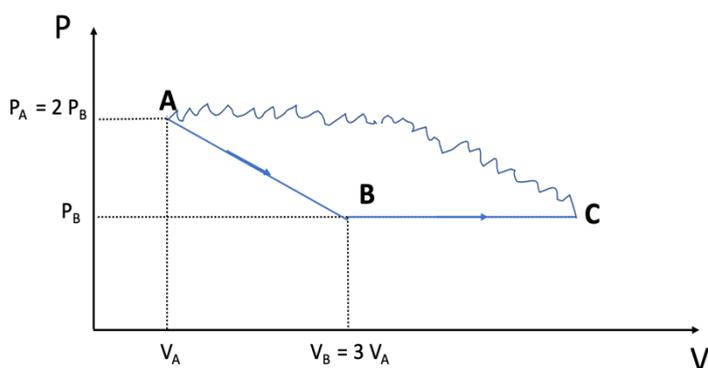
Esercizio 1

Un pendolo di lunghezza $L = 30.0$ cm e massa m_1 viene rilasciato da fermo da una posizione che forma un angolo $\theta_0 = 60^\circ$ con la verticale. Arrivato alla posizione verticale, il pendolo colpisce con un urto centrale elastico una sfera di massa $m_2 = 2 m_1$ che si trova ferma su un piano orizzontale liscio.



Calcolare:

- L'accelerazione del pendolo subito dopo l'urto;
- L'altezza massima raggiunta dalla sfera 2 lungo un piano inclinato scabro con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.25$ e angolo di inclinazione $\theta_1 = 30^\circ$.
- Il tempo necessario alla sfera 2 per ritornare alla base del piano inclinato a partire dall'istante in cui inizia la discesa.



Esercizio 2:

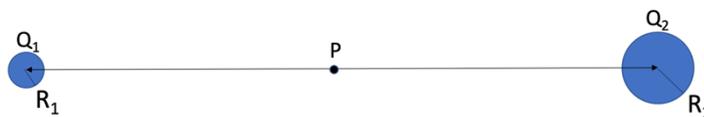
Due moli di gas perfetto monoatomico compiono le due trasformazioni reversibili AB e BC rappresentate nella figura.

Sapendo che $V_A = 3.00$ l, $P_B = 3.00$ atm, $V_B = 3 V_A$, $P_A = 2 P_B$ e che il calore assorbito dal gas nella trasformazione BC è $Q_{BC} = 6839$ J, calcolare:

- Il lavoro fatto dal gas nella trasformazione da A a B;
- La temperatura del gas nello stato C;
- Il calore ceduto dal gas nella trasformazione irreversibile da C ad A, sapendo che per compiere questa trasformazione è necessario esercitare una forza esterna costante di modulo $F = 32931$ N mediante un pistone circolare di raggio $R = 12.6$ cm.

Esercizio 3

Considerate di avere due sfere cariche e conduttrici di raggio $R_1 = 1.5$ cm e $R_2 = 2 R_1$ cm poste ad una distanza dei centri di $d = 30$ cm, molto maggiore della somma dei raggi $R_1 + R_2$ e tale da trascurare fenomeni di induzione elettrostatica (vedi figura). Sulla prima sfera vi è una carica negativa pari a $Q_1 = - 3 \mu\text{C}$ e sulla seconda una carica positiva $Q_2 = 4 \mu\text{C}$.



Calcolare:

- Il campo elettrico E in un punto P equidistante dal centro delle due sfere lungo la congiungente (vedi figura);
- Il potenziale V nel punto P e al centro della sfera 2;
- Le nuove cariche Q_1' e Q_2' delle due sfere dopo che queste vengono collegate con un filo conduttore.

Soluzione 1:

Inizialmente il pendolo si trova ad un'altezza

$$h_0 = L(1 - \cos \theta_0) = 0.15 \text{ m}$$

al di sopra del piano orizzontale. La sua velocità prima dell'urto si ricava dalla conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = m_1 g h_0$$

da cui:

$$v_1 = \sqrt{2 g h_0} = 1.72 \text{ m/s}$$

La seconda sfera è inizialmente ferma, $v_2 = 0$.

Dopo l'urto centrale elastico le due sfere hanno velocità:

$$v_1' = \frac{2 m_2 v_2 + v_1 (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} = -\frac{v_1}{3} = -0.57 \text{ m/s}$$

$$v_2' = \frac{2 m_1 v_1 + v_2 (m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} = \frac{2 v_1}{3} = 1.14 \text{ m/s}$$

L'accelerazione del pendolo dopo l'urto ha modulo:

$$a_1 = \frac{v_1'^2}{L} = 1.09 \text{ m/s}^2$$

ed è diretta verticalmente verso l'alto.

Il secondo corpo si muove lungo il piano orizzontale liscio con velocità v_2' costante fino a quando inizia a salire lungo il piano inclinato scabro. L'altezza massima raggiunta si ricava dalla conservazione dell'energia meccanica in presenza di forze non conservative:

$$m_2 g h_{\max} - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = -\mu_d m_2 g \cos \theta_1 d_{\max} = -\mu_d m_2 g \cos \theta_1 \frac{h_{\max}}{\sin \theta_1}$$

dove d_{\max} è la distanza percorsa lungo il piano. Dalla relazione precedente si ricava:

$$h_{\max} = \frac{v_2'^2}{2g(1 + \mu_d \cot \theta_1)} = 0.046 \text{ m}$$

Il tempo necessario alla sfera 2 per ritornare da questa posizione alla base del piano si può ricavare dall'equazione del moto uniformemente accelerato con accelerazione:

$$a_2 = \frac{m_2 g \sin \theta_2 - \mu_d m_2 g \cos \theta_2}{m_2} = 2.78 \text{ m/s}^2$$

e dunque arriva alla base del piano in un tempo t_{\max} :

$$d_{\max} = \frac{1}{2} a_2 t_{\max}^2 = 0.093 \text{ m}$$

$$t_{\max} = \sqrt{\frac{2 d_{\max}}{a_2}} = 0.26 \text{ s}$$

Soluzione 2:

Il lavoro compiuto dal gas per passare dallo stato A allo stato B è:

$$L_{AB} = (V_B - V_A) (P_A + P_B)/2$$

Dal momento che $V_B = 3 V_A$ e che $P_B = P_A/2$, si ha che:

$$L_{AB} = (2 V_A) (3 P_B)/2 = 3 V_A P_B = 2736 \text{ J}$$

Conoscendo Q_{BC} , la temperatura nello stato C si può calcolare dalla relazione:

$$Q_{BC} = n c_p (T_C - T_B)$$

sapendo che $T_B = P_B V_B/nR = (P_A/2) (3 V_A)/nR = (3/2) T_A = 165 \text{ K}$, che $n = 2$ e che $c_p = 5/2$

$$T_C = Q_{BC}/(n c_p) + T_B = 329 \text{ K}.$$

Il calore sottratto al gas nella trasformazione irreversibile si ottiene dal primo principio della termodinamica:

$$Q_{CA} = \Delta U_{CA} + L_{CA} = n c_v (T_A - T_C) - L_{\text{ext}} = -15351 \text{ J}$$

dove:

$$L_{\text{ext}} = F |(V_A - V_C)|/S = 9879 \text{ J}$$

è il lavoro positivo fatto dalla forza esterna sul pistone per comprimere il gas dal volume $V_C = n R T_C/P_C = 0.018 \text{ m}^3 = 18 \text{ l}$ al volume V_A .

Soluzione 3:

Il campo elettrico generato da ciascuna delle due cariche nel punto P è diretto lungo la congiungente e nel verso che va dalla sfera 2 alla sfera 1. Dunque, il modulo del campo nel punto P è:

$$E(P) = E_{Q1} + E_{Q2} = k_0 \left[\frac{|Q_1|}{(d/2)^2} + \frac{Q_2}{(d/2)^2} \right] = 2.8 \cdot 10^6 \text{ V/m}$$

La direzione è lungo la congiungente e il verso va dalla sfera con la carica positiva a quella con la carica negativa.

Il potenziale generato dalle due cariche nel punto P è:

$$V(P) = V_{Q1} + V_{Q2} = k_0 \left[\frac{Q_1}{(d/2)} + \frac{Q_2}{(d/2)} \right] = 5.99 \cdot 10^4 \text{ V.}$$

Il potenziale generato dalle due cariche al centro della sfera 2 è:

$$V(O_2) = V_{Q1} + V_{Q2} = k_0 \left[\frac{Q_1}{d} + \frac{Q_2}{R_2} \right] = 1.11 \cdot 10^6 \text{ V.}$$

Dopo il collegamento avremo che le superfici delle due sfere conduttrici saranno equipotenziali:

$$V_{Q1'} = V_{Q2'}$$

$$k_0 \frac{Q_1'}{R_1} = k_0 \frac{Q_2'}{R_2}$$

$$Q_1' = Q_2' \frac{R_1}{R_2} = Q_2' / 2$$

Dato che la carica si conserva:

$$Q_1' + Q_2' = Q_1 + Q_2$$

$$3/2 Q_2' = 1 \mu\text{C}$$

$$Q_2' = 2/3 \mu\text{C} = 0.66 \cdot 10^{-6} \text{ C} \quad Q_1' = 1/3 \mu\text{C} = 0.33 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$