CALCOLO DELLE PROBABILITA'
6–9-2021
Proff. Beghin - Orsingher

Nome:.. **Cognome:**..
Matricola:................................

E1) Partecipo ad un gioco a premi che prevede 12 premi di importo pari a $1, 2, 3, ..., 12$ euro.
i) Se vinco un premio a caso, calcolare la probabilità degli eventi A_k = "viene vinto un premio di importo pari ad un multiplo di k", per $k = 2, 3, 4$.
ii) gli eventi al punto i) sono indipendenti?
iii) sapendo che il premio vinto è multiplo di 3 o 4, calcolare la probabilità che sia pari a 6.
iv) Se invece vinco 5 premi (scelti a caso, supponendo che non possano mai capitare premi dello stesso importo), qual è la probabilità che io vinca almeno 3 premi di importo dispari?

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

i) $P(A_2) = P(\{2,4,6,8,10,12\}) = P(\text{pari}) = \boxed{\frac{1}{2}}$

$P(A_3) = P(\{3,6,9,12\}) = \frac{4}{12} = \boxed{\frac{1}{3}}$

$P(A_4) = P(\{4,8,12\}) = \boxed{\frac{1}{4}}$

ii) non sono indipendenti poiché

$P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(\{12\}) = \frac{1}{12} \neq P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) = \frac{1}{24}$

iii) $P(\{6\} \mid A_3 \cup A_4) = \frac{1}{\#\{3,6,9,12,4,8\}} = \boxed{\frac{1}{6}}$

[oppure $P(\{6\} \mid A_3 \cup A_4) = \frac{P(A_3 \cup A_4 \mid \{6\})\, P(\{6\})}{P(A_3 \cup A_4)}$

$= \frac{1 \cdot \frac{1}{12}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12}} = \frac{1}{6}$]

iv) $P\left(\text{almeno 3 dispari su 5}\right) = \dfrac{\sum_{j=3}^{5} \binom{6}{j}\binom{6}{5-j}}{\binom{12}{5}}$

$$= \frac{\binom{6}{3}\binom{6}{2}}{\binom{12}{5}} + \frac{\binom{6}{4}\binom{6}{2}}{\binom{12}{5}} + \frac{\binom{6}{5}\cancel{\binom{6}{0}}^{=1}}{\binom{12}{5}}$$

\

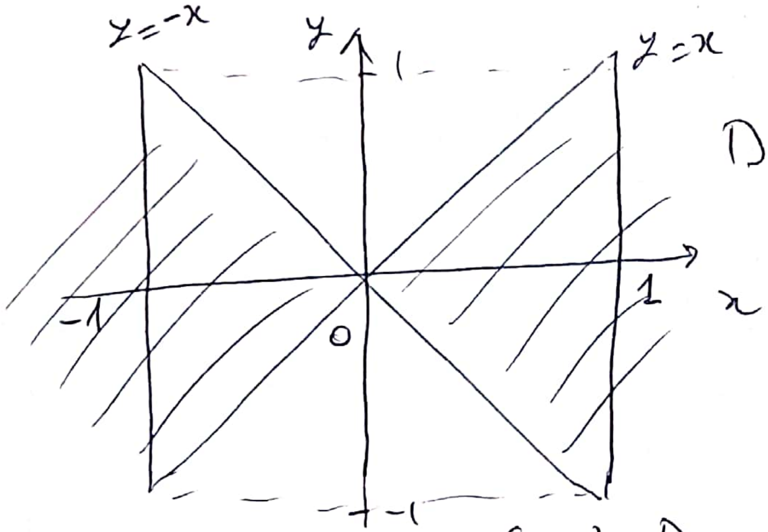
Nome:... **Cognome:**...
Matricola:.................................

E2) Sia X una v.a. uniforme sulla regione del piano definita da

$$D = \{x, y : (-1 < x < 0,\ x < y < -x) \bigcup (0 < x < 1,\ -x < y < x)\}$$

i) trovare la densità congiunta $f(x, y)$
ii) trovare le densità marginali $f(x)$ e $f(y)$
Se X e Y sono v.a. indipendenti con densità rispettivamente pari a $f(x)$ e $f(y)$
iii) trovare la funzione di ripartizione di $Z = X + Y$ e la sua densità **solo** per $-2 < z < -1$
iv) verificare che $P(-2 < Z < -1) = \cancel{1/10}$ $1/8$
v) calcolare il valore atteso di Z

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate



i)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$$

ii)

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{y} dx + \int_{-y}^{1} dx\right] = y+1 & -1 < y < 0 \\ \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{-y} dx + \int_{y}^{1} dx\right] = 1-y & 0 < y < 1 \end{cases}$$

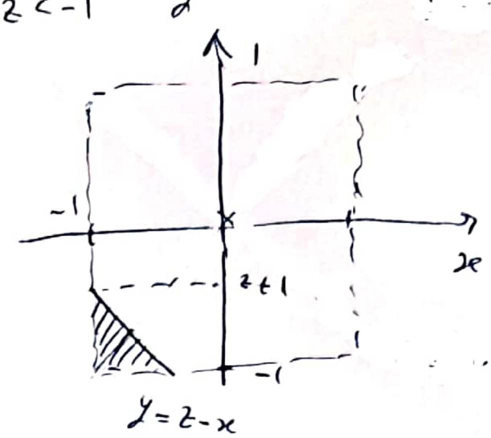
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_{x}^{-x} dy = -x & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{2}\int_{-x}^{x} dy = x & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Scansionato con CamScanner

iii) $P(Z<z) = P(X+Y<z)$ per $-2<z<-1$

$$= \int_{-1}^{z+1} dx \int_{-1}^{z-x} f(x,z)\, dz$$

$$= \int_{-1}^{z+1} (-x)\, dx \int_{-1}^{z-x} (y+1)\, dy$$



$$\Rightarrow \boxed{f_Z(z)} = \frac{d}{dz} P(Z<z) = -\int_{-1}^{z+1} x(z-x+1)\, dx$$

$$= \boxed{\frac{(z+2)^2}{2} - \frac{(z+2)^3}{6} \quad \text{per } -2<z<-1}$$

iv) $\boxed{P(-2<Z<-1)} = \int_{-2}^{-1} f_Z(z)\, dz = \frac{1}{2}\int_{-2}^{-1} (z+2)^2\, dz - \frac{1}{6}\int_{-2}^{-1} (z+2)^3\, dz$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{24} = \boxed{\frac{1}{8}}$$

v) $\boxed{\mathbb{E}Z} = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y = \int_{-1}^{1} x|x|\, dx + \int_{-1}^{1} y(1-|y|)\, dy \boxed{= 0}$

Scansionato con CamScanner