CALCOLO DELLE PROBABILITA' E STATISTICA
12/7/2021
Proff. Beghin - Orsingher

Cognome :	Nome :	Matricola :

E1) Un gioco in due fasi consiste nelle seguenti regole: nella prima fase si lancia una moneta regolare. Se esce testa si estraggono, con ripetizione, 3 palline da un'urna che ne contiene 6 (di cui 3 bianche e 3 nere). Se esce croce si estraggono, sempre con ripetizione, 4 palline dalla stessa urna. Si calcolino

1. la distribuzione di probabilità del numero di palline bianche estratte (si consiglia di verificare la correttezza del risultato controllando che la somma delle probabilità sia pari ad 1)
2. la probabilità di ottenere lo stesso numero di palline bianche e nere

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

T 3 estrazioni
C 4 estrazioni

$U < \begin{matrix} 3B \\ 3N \end{matrix}$

$X =$ "n° palline B estratte"

1) $\boxed{P(X=k)} = P(X=k|T)P(T) + P(X=k|C)P(C)$

per $k=0,1,2,3,4$

per $k=0,1,2,3$ $\quad = \frac{1}{2}\left[\binom{3}{k}\frac{1}{2^3} + \binom{4}{k}\frac{1}{2^4}\right] = \boxed{\frac{1}{2^4}\left[\binom{3}{k} + \frac{1}{2}\binom{4}{k}\right]}$

per $k=4$ $\quad \boxed{P(X=4)} = P(X=4|C)P(C) = \frac{1}{2}\binom{4}{4}\frac{1}{2^4} = \boxed{\frac{1}{2^5}}$

Verifica:
$$\sum_{k=0}^{4} P(X=4) = \frac{1}{2^4}\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k} + \frac{1}{2^5}\binom{4}{4} + \frac{1}{2^5}\sum_{k=0}^{\cancel{4}\,3}\binom{4}{k}$$
$$= \frac{1}{2^{4}}(1+1)^3 + \frac{1}{2^5}\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^5}(1+1)^4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

2) $A =$ "stesso numero di B e N"

$$\boxed{P(A)} = \underset{0}{\underset{\parallel}{\cancel{P(A|T)}}}\, P(T) + P(A|C)\, P(C)$$

$$= \frac{1}{2} P(2B \text{ e } 2N) = \frac{1}{2} \binom{4}{2} \cdot \frac{1}{2^4}$$

$$= \frac{1}{2^5} \frac{4!}{2!\,2!} = \boxed{\frac{3}{16}}$$

E2) Sia Θ una v.a. uniforme in $[0, \pi/2]$. Sia $Y = \sin\Theta$. Calcolare

1. la funzione di ripartizione di Y (si consiglia di verificarne la correttezza controllando che soddisfi le proprietà)
2. la funzione di densità di Y
3. la formula generale del momento r-esimo, per $r \in \mathbb{N}$, e ottenere da questa $\mathbb{E}Y$ e $\mathbb{E}Y^2$.
4. Se $Y^{1/n} = \sin^{1/n}\Theta$, calcolarne la funzione di ripartizione e il suo limite, per $n \to \infty$.
5. Se $Y^n = \sin^n\Theta$, calcolarne la funzione di ripartizione e il suo limite, per $n \to \infty$.

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

1) $Y \in [0,1]$ q.c.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ ? & 0 < y \leq 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = P(\sin\theta < y)$$
$$= P(0 < \Theta < \arcsin y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\arcsin y} d\theta = \frac{2}{\pi}\arcsin y$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \frac{2}{\pi}\arcsin y & 0 < y \leq 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

Verifica $\lim_{y \to 0^+} \frac{2}{\pi}\arcsin y = 0$

$\lim_{y \to 1^-} \frac{2}{\pi}\arcsin y = 1$

2) $$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\mathbb{1}_{y \in (0,1)}$$

3) $$\boxed{\mathbb{E}Y^n} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta \, d\theta$$

$\theta = \sqrt{y}$ $\quad d\theta = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{y^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}}{2}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} dy$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^1 y^{\frac{r+1}{2}-1} (1-y)^{\frac{1}{2}-1}$$

$$= \boxed{\frac{1}{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}} \qquad r \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{E} Y = \frac{2}{\pi}} \qquad \boxed{\mathbb{E} Y^2 = \frac{1}{2}}$$

4) $Y^{\frac{1}{n}} = \sin^{1/n}\theta \in (0,1)$ p.c.

$$F_{Y^{\frac{1}{n}}}(y) = P(\sin^{1/n}\theta < y) = P(0 < \sin\theta < y^n)$$

$$= \frac{2}{\pi} \arcsin y^n \qquad 0<y<1$$

$$\Rightarrow F_{Y^{\frac{1}{n}}}(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \frac{2}{\pi} \arcsin y^n & 0<y\leq 1 \\ 1 & y>1 \end{cases} \xrightarrow{n \to +\infty} \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{Y^{1/n} \xrightarrow[p]{d} 1}$$

5) $Y^n = \sin^n\theta$ $(0,1)$ p.c.

$$F_{Y^n}(y) = P(\sin^n\theta < y) = P(0 < \sin\theta < y^{1/n})$$

$$= \frac{2}{\pi} \arcsin y^{1/n} \qquad 0<y<1$$

$$\Rightarrow F_{Y^n}(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \frac{2}{\pi} \arcsin y^{1/n} & 0<y\leq 1 \\ 1 & y>1 \end{cases} \xrightarrow{n \to +\infty} \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1 & y > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{Y^n \xrightarrow[p]{d} 0}$$