CALCOLO DELLE PROBABILITA'
9-6-2021
Proff. Beghin - Orsingher

ES 1) Devo distribuire 12 libri, diversi tra loro, tra tre miei amici, in modo casuale. Calcolare la probabilità che

1. ciascuno dei miei amici riceva esattamente lo stesso numero di libri
2. due amici ricevano 6 libri ciascuno
3. uno dei tre amici riceva 11 libri.
4. due amici ricevano lo stesso numero di libri, sapendo che un amico non ne riceve nessuno

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

ES 2) Sia X una v.a. uniforme in $[0, 1]$

1. trovare le funzioni di ripartizione e di densità di
$$Y = X^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 1$$
2. sia Z una v.a. uniforme in $[0, 1]$ e indipendente da $Y = X^n$. Scrivere la densità congiunta di (Z, Y)
3. trovare la distribuzione di
$$W_n = Z \cdot X^n$$
4. Per $n \to \infty$ la successione W_n converge in distribuzione? A quale v.a.? Provarlo a partire dal risultato ottenuto al punto 3 oppure direttamente dalla defnzione di W_n

SOLUZIONI:

ES. 1:

1) $P(3 \text{ amici } 4) = \dfrac{\frac{12!}{4!\,4!\,4!}}{3^{12}}$ $\left(\text{ovvero } \dfrac{\binom{12}{4}\binom{8}{4}\cancel{\binom{4}{4}}}{3^{12}} \right)$

2) $P(2 \text{ amici } 6) = 3 \cdot \dfrac{\frac{12!}{6!\,6!}}{3^{12}}$ (3 sono i modi di scegliere l'amico che non riceve libri)

3) $P(1 \text{ amico } 11) = \dfrac{3! \cdot \frac{12!}{11!\,1!}}{3^{12}} = \dfrac{3! \cdot 12}{3^{12}} = \dfrac{8}{3^{10}}$

4) $P(2 \text{ amici } 6 \mid 1 \text{ amico } 0)$

$$= \frac{P(2 \text{ amici } 6 \cap 1 \text{ amico } 0)}{P(1 \text{ amico } 0)}$$

$$= \frac{P(2 \text{ amici } 6)}{P(1 \text{ amico } 0)} \longrightarrow \text{(poiché il I° evento implica il II°)}$$

$$= \frac{3 \cdot \frac{12!}{6!\,6!}}{\cancel{3^{12}}} \cdot \frac{\cancel{3^{12}}}{2^{12}} = \frac{3 \cdot 12!}{6!^2\, 2^{12}}$$

poiché $P(1 \text{ amico } 0) = \frac{2^{12}}{3^{12}}$

e $P(2 \text{ amici } 6) =$ calcolate al punto 2.

<u>Es. 2</u> $X \sim \text{Unif}[0,1]$

1) $Y = X^n \in [0,1]$ q.c.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ ? & 0 < y \leq 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = P(X^n < y) = P(X < y^{1/n}) = y^{1/n} \qquad y \in (0,1)$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ y^{1/n} & 0 < y \leq 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1} \mathbb{1}_{y \in (0,1)}$$

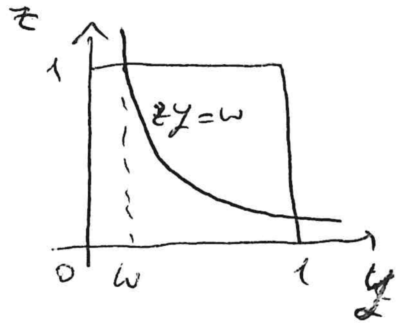
2) $Z \sim \text{Unif}[0,1]$ indip. da Y

$\Rightarrow (Z,Y)$ ha densità congiunta

$$f_{(Z,Y)}(z,y) = f_Z(z)\, f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{n} y^{1/n - 1} & 0<z<1,\ 0<y<1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

3) $W_n = Z \cdot X^n \in (0,1]$ p.c.

$$F_{W_n}(w) = \begin{cases} 0 & w \le 0 \\ ? & 0 < w \le 1 \\ 1 & w > 1 \end{cases}$$



$$F_{W_n}(w) = P(W_n < w) = P(Z \cdot X^n < w)$$

$$= 1 - P(Z \cdot Y > w)$$

$$= 1 - \frac{1}{n}\int_w^1 dy\, y^{\frac{1}{n}-1} \int_{w/y}^1 dz$$

$$= 1 - \frac{1}{n}\int_w^1 y^{\frac{1}{n}-1}\left(1 - \frac{w}{y}\right) dy$$

$$= 1 - \frac{1}{n}\int_w^1 y^{\frac{1}{n}-1} dy + \frac{w}{n}\int_w^1 y^{\frac{1}{n}-2} dy$$

$$= 1 - \cancel{\frac{1}{n}}\left[\frac{y^{\frac{1}{n}}}{\cancel{\frac{1}{n}}}\right]_w^1 + \frac{w}{n}\left[\frac{y^{\frac{1}{n}-1}}{\frac{1}{n}-1}\right]_w^1$$

$$= \cancel{1} - \cancel{1} + w^{1/n} + \frac{w}{1-n}\left(1 - w^{\frac{1}{n}-1}\right)$$

$$= \frac{\cancel{w^{1/n}} - n w^{1/n} + w - \cancel{w^{\frac{1}{n}}}}{1-n} = \frac{w - n w^{1/n}}{1-n} \quad \text{per } w \in (0,1]$$

$$\Rightarrow \quad F_{W_n}(w) = \begin{cases} 0 & w \le 0 \\ \dfrac{w - n w^{1/n}}{1-n} & 0 < w \le 1 \\ 1 & w > 1 \end{cases}$$

4) per $n \to +\infty$ dalla def. di $W_n = Z \cdot X^n$

$W_n \xrightarrow{q.c.} 0$ poiché $X^n \xrightarrow{q.c.} 0$ (essendo $X \in (0,1)$ q.c. e $Z \in (0,1)$ q.c.)

Quindi $W_n \xrightarrow{d} 0$

Invece dal punto 3)

$$\lim_{n \to +\infty} F_{W_n}(w) = \begin{cases} 0 & w \le 0 \\ 1 & w > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad W_n \xrightarrow{d} W \overset{q.c.}{=} 0$$