

Esercizio 2

Dati $m = 400$ g, $k = 1.6$ N/m, $l_e = 80$ cm, $v_i = 1.5$ m/s.

1. Nel laboratorio, prima dell'urto i punti 1 e 2 hanno entrambi velocità v_i , mentre i punti 3 e 4 hanno entrambi velocità nulla. Il c.d.m. dei quattro punti avrà dunque velocità $V = v_i/2$. Rispetto a questo riferimento, le velocità prima dell'urto dei punti 1 e 2 saranno quindi entrambe uguali a $v_i/2$, mentre quelle dei punti 3 e 4 saranno uguali a $-v_i/2$, per cui:

$$V_{12}^{(i)} = \frac{v_i}{2} \quad \text{e} \quad V_{34}^{(i)} = -\frac{v_i}{2}$$

Sempre in questo riferimento, subito dopo l'urto, i punti 2 e 3 si scambiano le velocità, mentre i punti 1 e 4 mantengono le stesse velocità iniziali. I punti 1 e 2 avranno quindi velocità uguali ed opposte, come i punti 3 e 4, ed i loro c.d.m. C_{12} e C_{34} saranno entrambi fermi nel c.d.m. dei quattro punti:

$$V_{12}^{(f)} = 0 \quad \text{e} \quad V_{34}^{(f)} = 0$$

2. Immediatamente dopo l'urto la distanza relativa tra i punti 1 e 2 è $\Delta x_{21} = x_2 - x_1 = l_e$ e la velocità relativa $v_{21} = v_2 - v_1 = -v_i/2 - v_i/2 = -v_i$, con la molla in posizione di riposo. Inizieranno quindi una oscillazione sinusoidale con pulsazione $\omega = \sqrt{k/\mu} = \sqrt{2k/m} = 2.83$ rad/s, essendo μ la massa ridotta $m/2$. La legge oraria sarà dunque:

$$\Delta x_{21}(t) = l_e - A \sin \omega t$$

Con analoghe considerazioni, la legge oraria della distanza relativa $\Delta x_{43} = x_4 - x_3$ dei punti 3 e 4 sarà:

$$\Delta x_{43}(t) = l_e - A \sin \omega t$$

L'ampiezza A delle oscillazioni si può determinare dalle espressioni delle velocità relative: $v_{21}(t) = v_{43}(t) = -A\omega \cos \omega t$.

Per $t = 0$, dovendo essere $v_{21}(0) = v_{43}(0) = -A\omega = -v_i$, deve essere $A = v_i/\omega = 53$ cm.

La minima distanza tra le due masse si ottiene quando $\sin \omega t = 1$ ed è quindi $l_e - A = 27$ cm.

3. Poiché i due c.d.m. C_{12} e C_{34} dopo il primo urto sono fermi uno rispetto all'altro, dopo un semiperiodo $T/2 = \pi/\omega = \pi\sqrt{m/(2k)}$ i punti 2 e 3 si

urteranno di nuovo con velocità uguali ed opposte, scambiandosi quindi la velocità.

Dopo il secondo urto i punti 1 e 2 avranno quindi la stessa velocità $-v_i/2$ rispetto al riferimento del c.d.m. dei quattro punti, con la molla in posizione di riposo, e si sposteranno quindi in maniera solidale con moto rettilineo uniforme verso sinistra, mentre i punti 3 e 4 si sposteranno solidalmente verso destra con velocità $v_i/2$. Ritrasformando queste velocità nel laboratorio, i punti 1 e 2 saranno fermi, mentre i punti 3 e 4 si sposteranno solidalmente verso destra con velocità v_i .