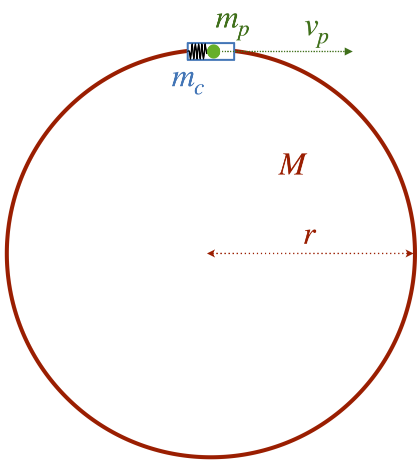
# Quarto esonero corso di Meccanica per Fisici

## Esercizio 2

Un cannoncino di massa $m_c$, realizzato con una molla di costante elastica $k$ compressa di $\Delta x$ rispetto alla sua lunghezza a riposo, è fissato sul bordo di un disco omogeneo di raggio $r$ e massa $M$. Il disco è libero di muoversi senza attrito su un piano orizzontale ed è inizialmente fermo. Ad un certo istante, rilasciando la molla, il cannoncino spara un proiettile di massa $m_p$ con una velocità rispetto ad un riferimento fisso data da $\vec{v}_p$, orizzontale e tangente al bordo del disco. Assumendo che l'espulsione del proiettile sia impulsiva, per cui l'allungamento della molla si può considerare istantaneo, si determini:

1. la distanza $d$ dal centro del disco del c.d.m. C del sistema costituito dal disco e dal cannoncino (dopo l'uscita del proiettile);
2. il modulo (formula e valore numerico) e la direzione della velocità del punto C dopo lo sparo;
3. il modulo (formula e valore numerico) e la direzione della velocità angolare con cui il disco ruota intorno a C dopo lo sparo;
4. quale deve essere la compressione iniziale $\Delta x$ del cannoncino, assumendo trascurabile ogni fenomeno dissipativo.

Dati: $m_c = 100$ g; $M = 900$ g; $m_p = 12$ g; $r = 40$ cm; $v_p = 3$ m/s.



## Soluzione

1. Il centro di massa del disco si trova a $r = 0$, la massa del cannoncino si trova al raggio $r$, per cui il punto $C$ si trova ad un raggio $d$ tale che
$$d = \frac{m_c}{m_c + M} r$$

2. Per la conservazione della quantità di moto totale, che è nulla prima dello sparo, si ha
$$(m_c + M)\vec{v}_C = -m_p \vec{v}_p$$
per cui il modulo di $v_C$, diretta in verso opposto a $v_p$, è
$$v_C = \frac{m_p}{m_c + M} \vec{v}_p = 3.6 \text{ cm/s}$$

3. Scegliendo come polo di riduzione dei momenti la posizione del c.d.m. C nell'istante dello sparo, per la conservazione del momento angolare totale, tenendo conto che tutte le parti del sistema si muovono dopo lo sparo sul piano orizzontale, la velocità angolare sarà verticale. Dovendosi conservare il momento angolare totale, che è nullo prima dello sparo, deve essere nullo anche il momento angolare dopo lo sparo. Il momento angolare finale è dato dalla somma del momento angolare del proiettile $J_p$, del momento angolare dovuto alla traslazione del c.d.m. $J_C$, del momento angolare dovuto alla rotazione del cannone e del disco intorno a C, rispettivamente $J_c$ e $J_D$. Tutti questi momenti angolari possono essere calcolati immediatamente dopo lo sparo:

   - poiché il proiettile si trova ad una distanza $rM/(m_c + M)$ da $C$ si ha
   $$\vec{J}_p = -\frac{M}{m_c + M} r m_p v_p \hat{k}$$
   - il momento angolare dovuto alla traslazione del centro di massa è nullo, perché C coincide col polo
   - il momento angolare del cannoncino è
   $$\vec{J}_c = m_c \Big( r \frac{M}{m_c + M} \Big)^2 \vec{\omega}$$
   - il momento d'inerzia del disco rispetto a $C$ è dato da
   $$I_C = \frac{1}{2} M r^2 + M \Big( \frac{m_c r}{m_c + M} \Big)^2$$
   ed il suo momento angolare sarà
   $$\vec{J}_D = I_C \vec{\omega}$$

Sommando tutti i contributi ed uguagliando a zero il momento angolare totale si ha

$$\frac{M(3m_c+M)}{2(m_c+M)}r^2\vec{\omega} - \frac{M}{m_c+M}rm_pv_p\hat{k} = 0$$

da cui

$$\vec{\omega} = \frac{2m_p}{3m_c+M}\frac{v_p}{r}\hat{k}; \quad |\omega| = 0.15 \text{ rad/s}$$

4. L'energia cinetica totale dello stato finale è data da

$$K = \frac{1}{2}\Big(m_pv_p^2 + (m_c+M)v_C^2 + \frac{M(3m_c+M)}{2(m_c+M)}r^2\omega^2\Big)$$

e sarà uguale all'energia potenziale iniziale della molla:

$$K = \frac{1}{2}k\Delta x^2$$

per cui

$$\Delta x = \sqrt{\frac{2K}{k}}$$