$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2m}\left(-\beta \mp \sqrt{\beta^2 - 4mk} \right)$$

Oscillatore sottosmorzato

Se $\beta^2 - 4mk < 0$ le due λ sono complesse coniugate $\lambda_{1,2} = -\frac{\beta}{2m} \mp i\omega$

con $\omega = \frac{\sqrt{-\beta^2 + 4mk}}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}$

e la soluzione generale è

$$x(t) = e^{-\frac{\beta}{2m}t}\left(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \right) = A e^{-\frac{\beta}{2m}t} \cos(\omega t + \varphi)$$

moto sottosmorzato, pseudoperiodico con ω tanto più prossimo alla frequenza propria dell'oscillatore non smorzato quanto più piccolo è il coefficiente di smorzamento β.

Le costanti C_1 e C_2 (o equivalentemente A e φ) sono determinate come sempre fissando posizione e velocità ad un certo istante.

Sovrasmorzamento e smorzamento critico

Se $\beta^2 - 4mk > 0$ le due λ sono reali e la legge oraria è

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \text{ con } \lambda_{1,2} = -\frac{\beta}{2m} \mp \omega$$

dove ora $\omega = \dfrac{\sqrt{\beta^2 - 4mk}}{2m} = \sqrt{\dfrac{\beta^2}{4m^2} - \dfrac{k}{m}}$

per cui le due λ sono entrambe negative.

Per la velocità si ha $v(t) = \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t}$

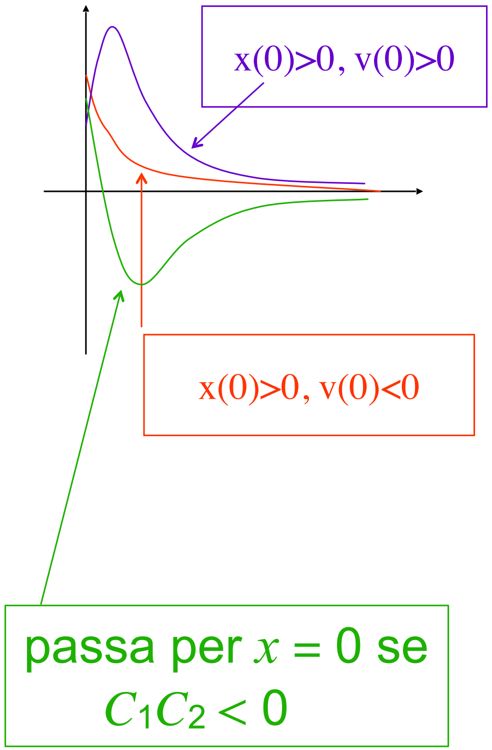
Il moto è sovrasmorzato, non c'è neanche una oscillazione completa.

C_1 e C_2 sono determinati dalle condizioni iniziali:

$$x(0) = C_1 + C_2; \quad v(0) = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$$

Se $\beta^2 - 4mk = 0$, si ha lo smorzamento critico

$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\frac{\beta}{2m}t}$, che è sempre anche il più rapido.



Energia di un oscillatore sottosmorzato

Un oscillatore sottosmorzato ha come legge oraria

$$x(t) = Ae^{-\frac{\beta}{2m}t}\cos(\omega t + \varphi)$$

se lo smorzamento è lento, $\frac{\beta}{2m} \to 0$, la pulsazione è prossima a quella dello stesso oscillatore non smorzato:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}} \simeq \sqrt{\frac{k}{m}}$$

e per molti periodi il moto è praticamente armonico: possiamo assumere che l'energia meccanica totale sia data dall'energia potenziale nella posizione massima dell'oscillazione, quando

$$\cos(\omega t + \varphi) = 1$$

L'ampiezza massima dell'oscillazione diminuisce però esponenzialmente nel tempo, per cui l'energia in funzione del tempo è data da:

$$E(t) = \frac{1}{2}kA^2e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

Oscillatore forzato **(FMUV 5.11)**

Supponiamo ora che l'oscillatore smorzato sia sottoposto ad una forza esterna dipendente dal tempo in maniera periodica.

Poiché una funzione periodica si può sviluppare in serie di Fourier, studiamo il caso di una dipendenza sinusoidale:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = F\cos\Omega t$$

che può essere considerata la parte reale dell'eq. complessa

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = Fe^{i\Omega t}$$

La soluzione generale è la somma della soluzione dell'omogenea associata con una soluzione particolare.

La soluzione dell'omogenea associata tende a zero per tempi lunghi.

Cerchiamo ora una soluzione particolare della forma $x(t) = x_0 e^{i\omega t}$:

avremo $\dot{x} = i\omega x_0 e^{i\omega t} = i\omega x(t); \quad \ddot{x} = -\omega^2 x_0 e^{i\omega t} = -\omega^2 x(t)$

ossia $(-m\omega^2 + i\beta\omega + k)x_0 e^{i\omega t} = Fe^{i\Omega t}$,

da cui $\omega = \Omega$ e $x_0 e^{i\Omega t} = \dfrac{F}{(-m\Omega^2 + i\beta\Omega + k)} e^{i\Omega t} = \dfrac{F}{Z} e^{i\Omega t}$

con $Z = k - m\Omega^2 + i\beta\Omega$, "impedenza complessa"

Soluzione a tempi lunghi dell'oscillatore forzato

L'impedenza complessa $Z = k - m\Omega^2 + i\beta\Omega$ può essere espressa attraverso il suo modulo e la sua fase:

$$|Z| = \sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + \beta^2\Omega^2}; \quad \varphi = \arctan\left(\frac{\beta\Omega}{k - m\Omega^2}\right)$$

come $Z = |Z| e^{i\varphi}$ e la soluzione cercata diventa $Ae^{i\Omega t} = \dfrac{F}{|Z|} e^{i(\Omega t - \varphi)}$

la cui parte reale è l'equazione oraria dell'oscillatore forzato a tempi lunghi:

$$x(t) = \frac{F}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + \beta^2\Omega^2}} \cos(\Omega t - \varphi)$$

che può essere scritta come

$$x(t) = \frac{F}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \beta^2 \frac{\Omega^2}{m^2}}} \cos(\Omega t - \varphi) = x_0 \cos(\Omega t - \varphi)$$

indicando con $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ la frequenza propria dell'oscillatore non smorzato

Derivazione della frequenza esatta di risonanza

$$x_0 = \frac{F}{m}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+\beta^2\frac{\Omega^2}{m^2}}}$$

x_0 non dipende dalle condizioni iniziali

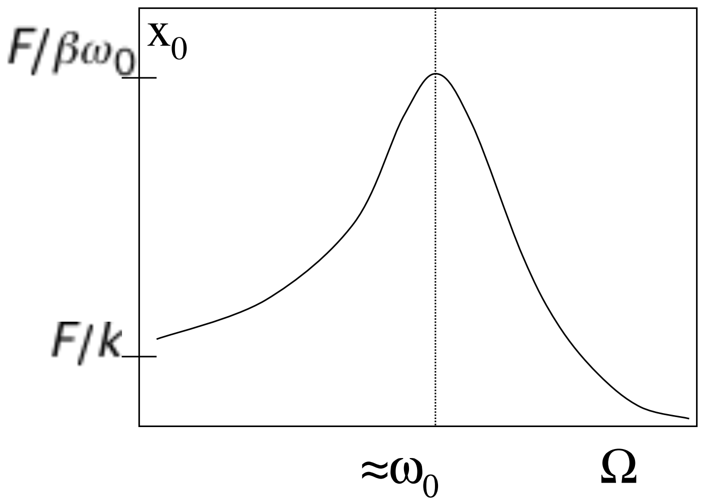
deriviamo per cercare massimi e minimi

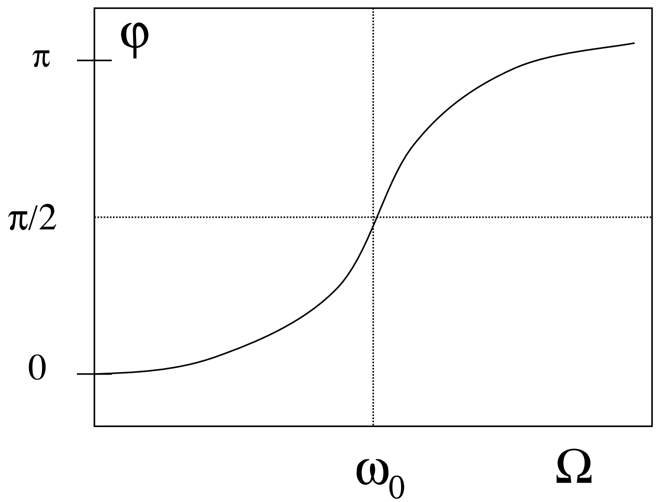
$$\frac{d}{d\Omega}\left(\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+\beta^2\frac{\Omega^2}{m^2}\right)=0$$

$$-2\cdot 2\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)\Omega+2\beta^2\frac{\Omega}{m^2}=0$$

$\Omega=0$ minimo

$\Omega^2=\omega_0^2-\frac{\beta^2}{2m^2}\approx\omega_0^2$ massimo

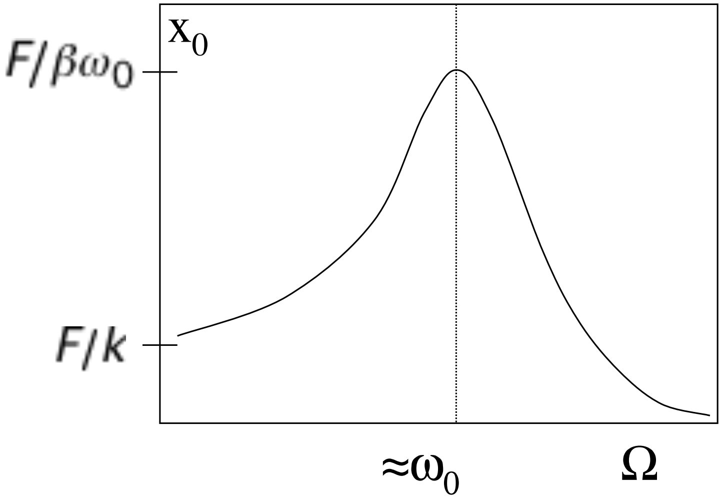


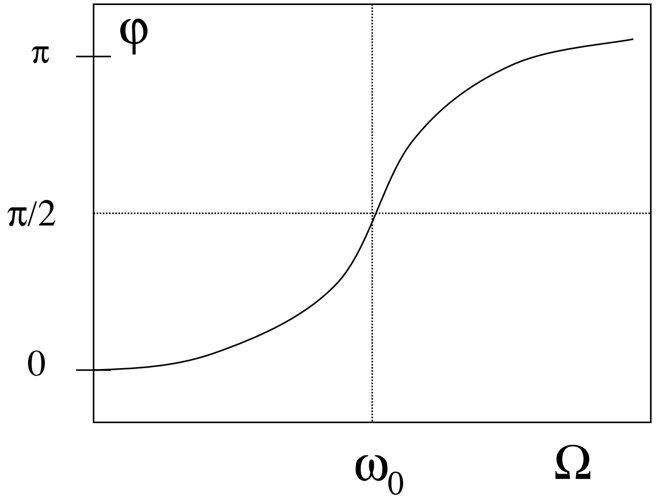


Risonanza e sfasamento

$$x(t) = \frac{F}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \beta^2 \frac{\Omega^2}{m^2}}} \cos(\Omega t - \varphi) = a \cos(\Omega t - \varphi)$$

dove a rappresenta l'ampiezza dell'oscillazione a tempi lunghi



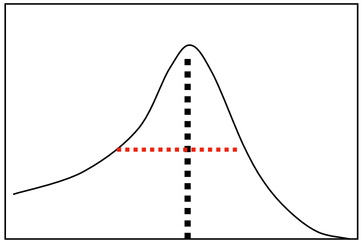


$$\varphi = \arctan\left(\frac{\beta\Omega}{k - m\Omega^2}\right)$$

La massima ampiezza si ottiene per uno stimolo di frequenza prossima a quella propria dell'oscillatore non smorzato (risonanza)

Lo spostamento risulterà sempre in ritardo rispetto allo stimolo. Per basse frequenze, lo spostamento è quasi in fase. Alla risonanza, lo sfasamento è di (circa) $\pi/2$. Ad alte frequenze, lo spostamento è in opposizione di fase con lo stimolo.

Fattore di merito



Energia immagazzinata: $\frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}k\frac{F^2}{m^2}\frac{1}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+\beta^2\frac{\Omega^2}{m^2}}$

- l'oscillatore assorbe tanta più energia quanto più lo stimolo ha una frequenza prossima alla risonanza.
- la larghezza della campana stabilisce la selettività dell'oscillatore (es. sintonizzazione di un segnale radio)

Quantifichiamo la larghezza, calcolando la "larghezza a mezza altezza" dell'energia immagazzinata

che alla risonanza ($\omega_0 \simeq \Omega$) vale $\frac{1}{2}kx_0^2 \simeq \frac{1}{2}k\frac{F^2}{m^2}\frac{1}{\beta^2\frac{\omega_0^2}{m^2}} = \frac{1}{2}k\frac{F^2}{\beta^2\omega_0^2}$

e si riduce di un fattore due quando

approssimazione valida se la larghezza è $\ll \omega_0$

$$(\omega_0^2-\Omega^2)^2 = \beta^2\frac{\omega_0^2}{m^2} \quad \text{cioè} \quad \Big((\omega_0-\Omega)(\omega_0+\Omega)\Big)^2 \simeq (\omega_0-\Omega)^2 4\omega_0^2 = \beta^2\frac{\omega_0^2}{m^2}$$

da cui $(\omega_0-\Omega) = \pm\frac{\beta}{2m} \quad \Rightarrow \quad \Omega_{1,2} = \omega_0 \mp \frac{\beta}{2m}$

e la larghezza a mezza altezza è quindi data da $\frac{\Omega_2-\Omega_1}{\omega_0} = \frac{\beta}{\omega_0 m} = \frac{1}{Q}$

dove Q prende il nome di fattore di merito dell'oscillatore smorzato.