Ancora sulla forza peso

Una forza è conservativa quando per essa esiste l'energia potenziale, una funzione della posizione del punto dalla quale può essere derivato il lavoro della forza per qualsiasi traiettoria.

Per una forza conservativa l'energia totale $E = K + V$ è una costante del moto.

L'energia potenziale è sempre definita a meno di una costante additiva arbitraria.

Riprendiamo come esempio la forza peso: la costante additiva del potenziale della forza peso può essere sempre scelta in modo da annullare il potenziale finale (o iniziale), per cui si può porre, p. es.,

$$V_B = 0 \quad \text{e} \quad V_A = mgh$$

Applicando la conservazione dell'energia, per un corpo che parte da fermo sotto l'azione della sola gravità, si ottiene allora

$$E = V_i + K_i = V_f + K_f \quad \Rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2} m v_B^2 \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2gh}$$

Lo stesso risultato vale anche in presenza di un vincolo liscio come una guida o un binario, la cui reazione puramente normale alla traiettoria non compie lavoro.

Differenziali esatti

Si può trovare una condizione generale sulla forza che renda il suo lavoro indipendente dalla traiettoria?

Nel caso della forza peso, abbiamo visto che $\delta L = -\,mgdz$ ossia che il lavoro infinitesimo è effettivamente un differenziale esatto.

Come possiamo interpretare la definizione di differenziale esatto?

Nel caso di una sola dimensione, se $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$, ossia se la funzione $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, per definizione di integrale definito si ha:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dF(x)}{dx}dx = \int_{F_1=F(x_1)}^{F_2=F(x_2)} dF = F(x_2) - F(x_1)$$

e quindi $f(x)dx$ risponderebbe alla definizione data di differenziale esatto.

Tuttavia il lavoro è un integrale curvilineo lungo la traiettoria

$$L = {}_\gamma\!\int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{r} = {}_\gamma\!\int_A^B [f_x(x,y,z)dx + f_y(x,y,z)dy + f_z(x,y,z)dz]$$

derivate parziali e differenziali totali (FMUV A.4)

Nel caso di una funzione di più variabili, es. $U(x,y,z)$, se si definisce la derivata parziale come

$$\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} = \left.\frac{dU(x,y,z)}{dx}\right|_{y=\text{costante},\ z=\text{costante}}$$

e il differenziale totale come

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

si ha che $$\int_{A\equiv(x_A,y_A,z_A)}^{B\equiv(x_B,y_B,z_B)} dU = U(B) - U(A)$$

Una generica forma differenziale $a(x,y,z)dx + b(x,y,z)dy + c(x,y,z)dz$

è un differenziale esatto, ossia è il differenziale totale di una funzione F

$$a = \frac{\partial U}{\partial x},\quad b = \frac{\partial U}{\partial y},\quad c = \frac{\partial U}{\partial z},$$

solo se $$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x},\quad \frac{\partial a}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial x},\quad \frac{\partial b}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial y}$$

NB: la condizione è anche sufficiente se l'insieme su cui la funzione è definita è semplicemente connesso

Campi di forze conservativi (FMUV 6.4)

Dalle precedenti considerazioni si può vedere che una forza conservativa si può ricavare dal suo potenziale attraverso l'operatore gradiente:

$$\vec{f} \equiv -\left(\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z}\right) = -\,\mathrm{grad}\ V(x,y,z) = -\,\vec{\nabla}\,V(x,y,z)$$

Ricapitolando, una forza è conservativa se si verifica una delle seguenti condizioni, tutte tra loro equivalenti:

a) il lavoro non dipende dal percorso

b) il lavoro lungo qualunque curva chiusa è nullo

c) esiste una funzione scalare il cui gradiente cambiato di segno uguaglia la forza

Il fatto che una forza si possa derivare da una funzione scalare delle coordinate spaziali (per cui l'energia potenziale dovrebbe più significativamente essere chiamata "energia posizionale") fa sì che tale forza possa essere associata ad un campo, ossia ad una proprietà dello spazio indipendente dalla presenza di una massa da accelerare.

Si parla in questo caso di campi di forze conservativi.

Risulta anche evidente che affinché il campo sia conservativo, l'energia potenziale (e quindi la forza) non deve dipendere dal tempo.