Prof. Giulio Vidotto (Università di Padova)

Lez. 6 - ***Le scale nominali e le scale ordinali***

Argomenti della lezione

➔ **Scale di Misura**

- ✔ **Scala nominale**
- ✔ **Scala ordinale**

Scala Nominale

Consideriamo il Sistema Empirico Classificatorio

$\boxed{\tilde{A} = \langle A, \sim \rangle}$

che è ripartito in classi di equivalenza

(elementi dell'insieme quoziente $\tilde{A} / \sim$)

Ad ognuna di queste classi (che sono tante quanto la cardinalità di $\tilde{A} / \sim$) possiamo associare un numero che ne rappresenterà la misura in modo che:

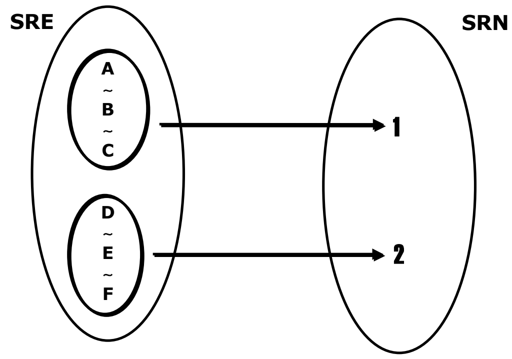
Agli elementi della stessa classe associamo lo stesso numero, ad elementi di classi diverse corrisponderanno numeri diversi.

I numeri che rappresentano la misura delle classi sono dei puri simboli, delle etichette per le classi.

Prof. Giulio Vidotto (Università di Padova)
Lez. 6 - ***Le scale nominali e le scale ordinali***

Teorema di Rappresentazione

Se Ã è un sistema classificatorio e se l'insieme quoziente Q = A / ~ è un insieme finito o infinito numerabile, allora esiste una scala S = { Ã, $\Re$, φ}

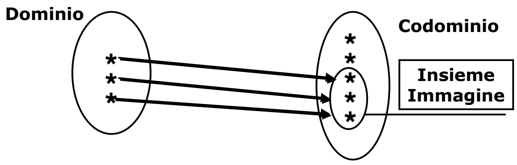


Teorema di unicità

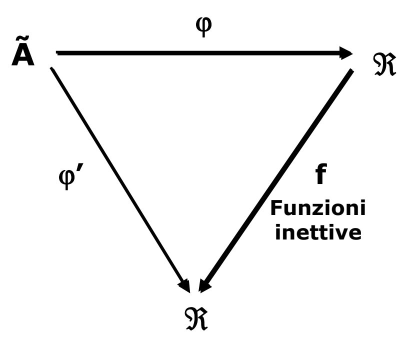
Ogni scala è unica a meno di trasformazioni iniettive.

N.B.: una funzione si dice iniettiva quando $\forall\ \alpha_1, \alpha_2 \in$ R
$f(\alpha_1) = f(\alpha_2) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$

N.B.: una f si dice suriettiva quando il suo codominio coincide con l'insieme immagine. Una funzione iniettiva diviene una corrispondenza biunivoca quando codominio e insieme immagine coincidono.



La famiglia delle trasformazioni permissibili per la scala S è costituita da tutte le funzioni iniettive f in $\Re$ tali che se S' = { Ã, $\Re$, φ'} è una nuova scala allora l'omomorfismo φ' è così ottenuto: φ' = f ° φ



Prof. Giulio Vidotto (Università di Padova)

Lez. 6 - *Le scale nominali e le scale ordinali*

Regole per Costruire una Scala Nominale

Per costruire la scala di misura S = { Ã, ℜ, φ} basta associare a tutti gli elementi di una classe di equivalenza lo stesso numero e a classi di equivalenza diverse numeri diversi.

Ad esempio:

siano [x] e [y] due classi distinte di Ã, allora l'omomorfismo φ associa:

$$[\mathbf{x}] \rightarrow \alpha, \ [\mathbf{y}] \rightarrow \beta$$

con $\alpha \neq \beta$

$\alpha, \beta \in \Re$

Se la classe [x] è formata da tutti gli elementi z ∈ A che sono equivalenti al rappresentante x, ossia [x] = { z ∈ A: z ~ x} allora , ad ogni z ∈ A, φ associa lo stesso numero reale α

In una corsa si possono dividere i partecipanti in:

Coloro che arrivano al traguardo (1) e coloro che non vi arrivano (2)

Marco, Luca, Edoardo $\longrightarrow$ **1**

Milo, Andrea $\longrightarrow$ **2**

Scala Ordinale

Un sistema empirico Ã ordinato è una serie se l'ordine è stretto totale e una quasi-serie se l'ordine è largo totale.

N.B.: la relazione d'ordine stretto è indicata con <, mentre la relazione d'ordine largo è indicata con ≤

Scala Ordinale

Se l'ordine in Ã è largo totale e si considera l'insieme quoziente Ã' = Ã/~, la quasi-serie Ã viene trasformata nella serie Ã' dove l'ordine è stretto totale. Il sistema Ã' è anche indicato come "serie associata alla quasi-serie Ã "

Se in Ã l'ordine è stretto totale allora Ã = Ã' ed ogni elemento di Ã si può pensare come una classe di equivalenza contenente un unico elemento.

Quindi:

si consideri un sistema empirico ordinato Ã (o Ã') e si voglia, se possibile, misurarlo costruendo un omomorfismo φ tra la serie empirica Ã (o Ã') ed il relativo sistema relazionale numerico (una quasi-serie numerica).

Teorema di Rappresentazione

Se Ã è un sistema empirico ordinato e Ã' la serie empirica associata ad Ã, dove Ã' è costituita da un insieme di elementi finito o infinito numerabile

è sempre possibile costruire una scala di misura S = { Ã', ℜ, φ} dove

$$\Re = < R, \leq >$$

è il sistema numerico costituito dall'insieme dei numeri reali R e da una relazione di ordine largo totale.

Teorema di unicità

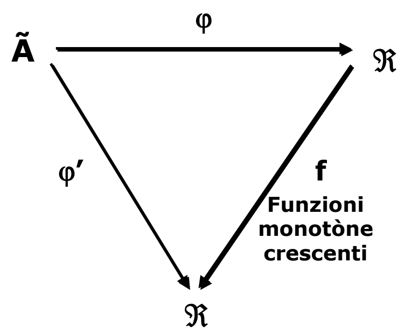
Ogni scala è unica a meno di trasformazioni monotòne crescenti in senso stretto.

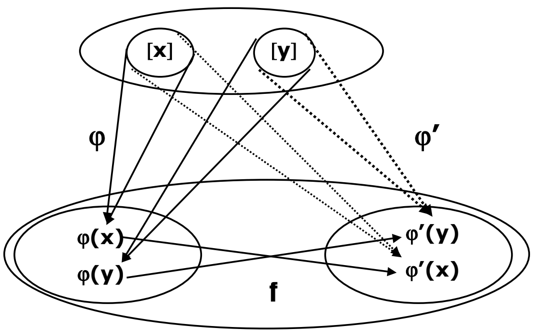
NB: una funzione f: R→R è monotòna crescente in senso stretto quando per ogni coppia x, x'∈R se x<x' allora f(x)<f(x')

La famiglia delle trasformazioni permissibili per la scala S = { Ã', ℜ, φ} è costituita da tutte le funzioni monotòne crescenti in senso stretto f, definite in ℜ tali che se S' = { Ã', ℜ, φ'} è una nuova scala allora l'omomorfismo φ' è così ottenuto

$$\varphi' = f \circ \varphi$$

Se φ è un omomorfismo fra sistemi ordinati e se f è monotòna crescente in senso stretto, l'applicazione composta f ° φ è ancora un omomorfismo fra sistemi ordinati.





Regole per Costruire una Scala Ordinale (Ã = serie)

Sia Ã = < A,< > una serie finita, allora gli elementi di A sono ordinati secondo l'ordine "<". Ad ogni elemento di A associamo, mediante una applicazione φ, il numero degli elementi di A che lo precedono…

Regole per Costruire una Scala Ordinale (con Ã = serie)

… questa φ è un omomorfismo φ : Ã → ℜ perché se (x, y ∈ A) e x precede y, cioè x < y, allora α = φ(x) < φ(y) = β, in quanto il numero α di elementi che precedono x è minore del numero β degli elementi che precedono y.

Regole per Costruire una Scala Ordinale
(Ã = serie infinita numerabile)

Sia Ã = < A,< > una serie infinita numerabile, esiste una applicazione biettiva fra A e l'insieme dei numeri naturali N:

gli elementi di A si possono anche scrivere come una successione $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ con $n \in N$ e poiché c'è la relazione d'ordine, il sistema $\tilde{A}$ può essere scritto come la successione ordinata $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < \ldots$

Per costruire un omomorfismo quindi, associamo al primo elemento x_1 un qualsiasi numero reale α_1, al secondo elemento x_2 che segue x_1 ($x_1 < x_2$) un numero reale α_2 (con $\alpha_1 < \alpha_2$) e così di seguito...

$$\varphi: \tilde{A} \rightarrow \Re = < R, < >$$

tale che $\varphi(x_n) = \alpha_n$ con $\alpha_n \in R$

Regole per Costruire una Scala Ordinale ($\tilde{A}$ = quasi-serie)

Sia $\tilde{A} = < A, <, \sim >$ una quasi-serie. Possiamo allora scrivere il sistema $\tilde{A}'$ come $\tilde{A}' = < A/\sim, < >$

Se $\tilde{A}'$ è finita o infinita numerabile, per costruire l'omomorfismo φ si associa ad ogni classe di equivalenza di $\tilde{A}'$ un numero reale e si mantiene l'ordine che esiste fra gli elementi di $\tilde{A}'$

Ad esempio:

In una corsa possiamo disporre gli atleti secondo l'ordine di arrivo (andando oltre la semplice distinzione fra coloro che hanno tagliato il traguardo ed i ritirati):

Marco $\longrightarrow$ **Luca** $\longrightarrow$ **Edoardo**

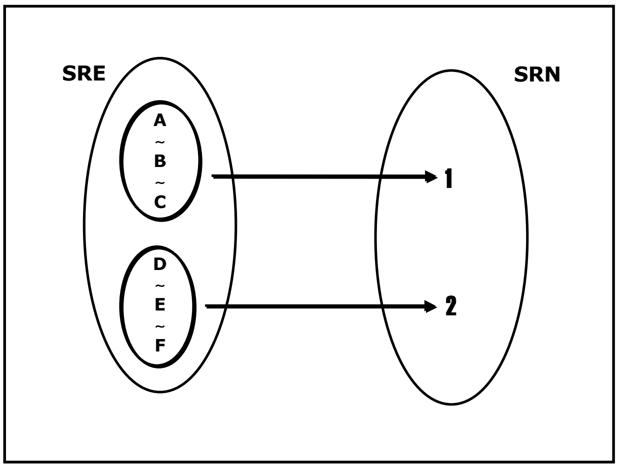
1 $\longrightarrow$ **2** $\longrightarrow$ **3**

Conclusione della lezione

➔ **Scale di Misura**

✔ **Scala nominale**

✔ **Scala ordinale**



In una corsa si possono dividere i partecipanti in:

Coloro che arrivano al traguardo (1) e coloro che non vi arrivano (2)

Marco, Luca, Edoardo → **1**

Milo, Andrea → **2**

Ad esempio:

In una corsa possiamo disporre gli atleti secondo l'ordine di arrivo (andando oltre la semplice distinzione fra coloro che hanno tagliato il traguardo ed i ritirati):

Marco → **Luca** → **Edoardo**

1 → **2** → **3**