

Lezione 14

L'analisi della Varianza (ANOVA): i disegni fattoriali tra i soggetti

Argomenti della lezione:

- ⇒ Effetti principali e interazioni
- ⇒ Analisi dei disegni fattoriali

Disegni fattoriali (o a più vie): disegni ANOVA con due o più variabili indipendenti

Esame degli effetti di due o più VI sulla VD. Le VI (o "fattori") sono impiegate in modo che tutte le possibili combinazioni dei loro livelli vengano esaminate

Vantaggi dei disegni fattoriali

- Consentono lo studio dell'interazione, cioè dell'effetto congiunto delle VI sulla VD
- Aumentano la potenza del test, riducendo la varianza di errore
- Consentono una maggiore economia con la stessa potenza

Effetti principali e interazioni

- ⇒ Effetto principale: effetto medio di una VI, in modo indipendente dai valori delle altre VI
- ⇒ Interazione: effetto congiunto di due VI sulla VD

Interazione

- ⇒ L'effetto di una VI sulla VD si verifica solo a determinati livelli dell'altra VI
- ⇒ L'effetto di una VI sulla VD non è lo stesso per tutti i livelli dell'altra VI

Esempio: disegno fattoriale 2x3

	T1	T2	T3	m_i
Abilità Alta	85.00	80.00	76.00	80.33
Abilità Bassa	60.00	63.00	68.00	63.67
m_j	72.50	71.50	72.00	

Ipotesi per gli effetti principali

a) Trattamento:
ipotesi sulle medie delle colonne

$$H_0: \mu_{.1} = \mu_{.2} = \mu_{.3}$$

H_1 : Almeno due medie differenti
[[$(\mu_{.1} \neq \mu_{.2})$ o $(\mu_{.1} \neq \mu_{.3})$ o $(\mu_{.2} \neq \mu_{.3})$]

Ipotesi per gli effetti principali

Abilità:
ipotesi sulle medie delle righe

$$H_0: \mu_{1.} = \mu_{2.}$$

$$H_1: \mu_{1.} \neq \mu_{2.}$$

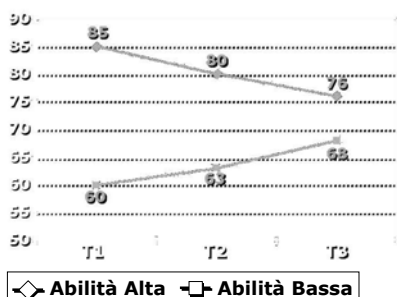
Ipotesi per l'interazione:

Ipotesi sulle differenze delle medie
nelle diverse
combinazioni dei livelli dei 2 fattori

$$H_0: (\mu_A - \mu_B)_{T1} = (\mu_A - \mu_B)_{T2} = (\mu_A - \mu_B)_{T3}$$

$$H_1: (\mu_A - \mu_B)_{T1} \neq (\mu_A - \mu_B)_{T2} \text{ oppure} \\ (\mu_A - \mu_B)_{T1} \neq (\mu_A - \mu_B)_{T3} \text{ oppure} \\ (\mu_A - \mu_B)_{T2} \neq (\mu_A - \mu_B)_{T3}$$

Rappresentazione grafica dell'interazione



Linee che si sovrappongono
oppure che sono parallele \Rightarrow

l'interazione tenderà a non
essere presente ("non
significativa")

Linee non parallele \Rightarrow

potrebbe esserci
un'interazione significativa
tra le variabili

Disegni fattoriali "Tra i soggetti" (Between Subjects)

	Obiettivi	
Feedback	SI	NO
SI	S1 S2	S5 S6
NO	S3 S4	S7 S8

Modello Teorico dei Disegni fattoriali "Tra i soggetti"

Punteggio y_{ijk} del soggetto "k" contenuto nella "cella" "ij"

(livello "i" del fattore F1 con il livello "j" del fattore F2):

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \phi_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

$\alpha_i = \mu_{i..} - \mu$: effetto principale di F1 (scarto della media della i-esima riga dalla media generale)

$\beta_j = \mu_{.j.} - \mu$: effetto principale di F2 (scarto della media della j-esima colonna dalla media generale)

ε_{ijk} : termine residuale ("errore")

$\phi_{ij} = \mu_{ij.} - \mu - (\alpha_i + \beta_j)$:
effetto dell'interazione

Parte della media della cella ij che non dipende dall'errore e che però non è spiegata né dalla media generale, né dagli effetti principali

Stime campionarie

	Fattore 2		
Fattore 1	F2=1	F2=2	
F1=1	$\bar{Y}_{11.}$	$\bar{Y}_{12.}$	$\bar{Y}_{1..}$
F1=2	$\bar{Y}_{21.}$	$\bar{Y}_{22.}$	$\bar{Y}_{2..}$
	$\bar{Y}_{.1.}$	$\bar{Y}_{.2.}$	$\bar{Y}_{...}$

Stime campionarie

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{...}$$

$$\hat{\alpha}_i = (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})$$

$$\hat{\beta}_j = (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})$$

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{ij} &= \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{...} - (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}) = \\ &= \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...} \end{aligned}$$

$$\hat{\varepsilon}_{ijk} = (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})$$

Scomposizione del punteggio

$$y_{ijk} = \hat{\mu} + (\hat{\alpha}_i - \bar{y}_{i..}) + (\hat{\beta}_j - \bar{y}_{.j.}) + (\hat{\phi}_{ij} - \bar{y}_{ij.}) + (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})$$

Scarto dalla media

$$y_{ijk} - \bar{y}_{...} = (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}) + (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})$$

Somme dei quadrati

$$\text{Devianza Totale} = SS_T = \sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2$$

$$\text{Devianza Tra i Gruppi} = SS_B$$

$$\text{Fattore 1: } \sum_i \sum_j \sum_k (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2$$

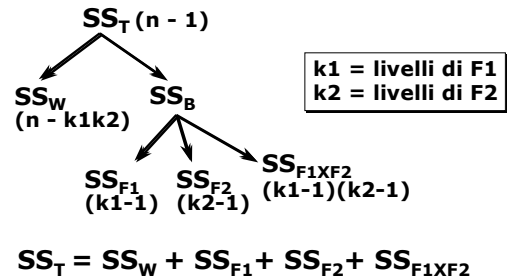
$$\text{Fattore 2: } \sum_i \sum_j \sum_k (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2$$

$$\text{Interazione: } \sum_i \sum_j \sum_k (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2$$

$$\text{Devianza Entro i Gruppi} = SS_W =$$

$$= \sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2$$

Scomposizione delle devianze



Devianza diviso gradi di libertà = varianza (Mean Square)

$$\text{Totale (MS}_T) = SS_T / GDL_T$$

$$\text{Fattore 1 (MS}_{F1}) = SS_{F1} / GDL_{F1}$$

$$\text{Fattore 2 (MS}_{F2}) = SS_{F2} / GDL_{F2}$$

$$\text{Interazione (MS}_{F1 \times F2}) = SS_{F1 \times F2} / GDL_{F1 \times F2}$$

$$\text{Entro i gruppi (MS}_W) = SS_W / GDL_W$$

Rapporto "F"

Abbiamo un rapporto F per ognuna delle 3 varianze between, con GDL pari ai GDL delle varianze coinvolte:

$$F_{F1} = MS_{F1} / MS_W$$

$$F_{F2} = MS_{F2} / MS_W$$

$$F_{F1 \times F2} = MS_{F1 \times F2} / MS_W$$

Analisi dei disegni fattoriali

Influenza del tipo di Rinforzo e del Compito (Fattori) sul numero di problemi risolti (Variabile Dip.)

Rinforzo: Lode, Critica, Silenzio

Compito: Semplice, Complesso

N soggetti: 10 per cella

Disegno: 3X2 (6 celle)

Tabella ANOVA dei risultati

Fonte	SS	GDL	MS	F	p
RINFORZO	57.27	2	33.63	9.61	.001
COMPITO	40.83	1	40.83	11.67	.002
RINFORZO X COMPITO	31.27	2	15.63	4.47	.022
Errore	34.00	24	3.50		
Totale	223.37	29			

Analisi degli effetti principali

"COMPITO": solo due livelli.
Effetto significativo \Rightarrow i due compiti hanno un numero medio di risposte sign. diverse

Compiti Semplici = 6.4

Compiti Complessi = 4.1

"RINFORZO": tre livelli

Effetto significativo \Rightarrow almeno due dei rinforzi determinano un numero medio di risposte significativamente differenti. Non sappiamo quali

\rightarrow Lode = 7.3

\rightarrow Critica = 4.6

\rightarrow Silenzio = 3.8

Confronti post-hoc
Lode > Critica = Silenzio

Confronti pianificati

Confronto 1:
Lode vs. (Critica+Silenzio) p = .000

Confronto 2:
Critica vs. Silenzio p = .349

Confronti pianificati

- La condizione di Lode risulta differente da quella di Critica e Silenzio aggregate
- Critica e Silenzio non presentano differenze significative

Analisi dell'interazione: gli effetti semplici

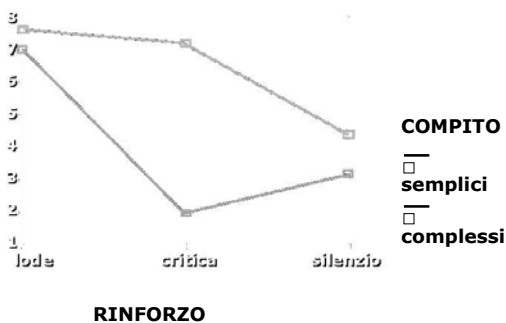
Medie delle celle

rinforzo	compito	media
lode	semplici	7.5
	complessi	7.0
critica	semplici	7.2
	complessi	2.0
silenzio	semplici	4.4
	complessi	3.2

La variabile Rinforzo produce un effetto sulla variabile Risposte che è differente a seconda dei livelli della variabile Compito

- "Lode" effetto identico nei compiti semplici e complessi
- "Critica" molto più efficace nei compiti semplici
- "Silenzio" stesso effetto nei due tipi di compiti

Grafico dell'interazione



Interazione significativa ⇒ analisi ulteriori per identificare le combinazioni dei fattori che determinano l'interazione

Effetti semplici

esame dei valori della VD associati ai valori di una VI, quando i valori dell'altra VI sono tenuti costanti

Esaminiamo le differenze nelle risposte dovute al tipo di compito (Semplici, Complessi)

separatamente per i tre diversi tipi di rinforzo (Lode, Critica, Silenzio)

Il disegno fattoriale viene semplificato in tanti disegni "monofattoriali" quanti sono i livelli della variabile indipendente che viene mantenuta costante

Se c'è un'interazione significativa, gli effetti semplici relativi ad una VI sono diversi nei differenti livelli della VI che viene controllata

Gli effetti semplici consentono di evidenziare l'effetto di modulazione che una VI ha sulla relazione tra un'altra VI e la variabile dipendente

L'analisi degli effetti principali annulla tale effetto, poiché confronta le medie marginali, nelle quali i livelli dell'altra VI vengono sommati tra di loro

Analisi di "Compito" mantenendo costante "Rinforzo"

RINFORZO		SS	DDL	MS	F	p
LODE	Effetto	.90	1	.90	.25	.62
	Errore	84.00	24	3.50		
CRITICA	Effetto	67.60	1	67.60	19.31	.000
	Errore	84.00	24	3.50		
SILENZIO	Effetto	3.60	1	3.60	1.03	.32
	Errore	84.00	24	3.50		

La devianza Between che viene scomposta è data dalla somma della devianza del fattore "Compito" (40.83) più la devianza dell'interazione (31.27). Infatti: $.90+67.60+3.60=40.83+31.27$

La devianza Within è quella del disegno fattoriale completo (84.00)

Questo risultato evidenzia che la differenza nelle risposte date ai compiti Semplici e Complessi è significativa solo nella condizione "Critica", mentre non lo è nelle condizioni "Lode" e "Silenzio"

- In generale, la "Lode" porta ad un incremento della prestazione
- Il tipo di rinforzo utilizzato non ha lo stesso effetto nei compiti semplici e nei compiti complessi
- L'effetto principale deve essere interpretato alla luce dell'interazione significativa

CONCLUSIONE

- Effetti principali e interazioni
- Analisi degli effetti principali
- Analisi degli effetti semplici