Esercizio 1

Un giocatore lancia una moneta regolare per scegliere con quanti dadi giocare. Se esce testa lancia ripetutamente un dado (regolare) fino a che non esce il numero 6. Se esce croce lancia ripetutamente due dadi (regolari) fino a che non escono due numeri 6. Calcolare

1. la distribuzione di probabilità della variabile aletoria $X =$ "numero di lanci del dado, o dei dadi, necessari per ottenere il risultato"
2. la probabilità che sia uscita testa se il gioco si ferma dopo due lanci del dado, o dei dadi.

Esercizio 2

Sia dato il quadrato

$$Q = \{x, y : |x - y| \leq 1, |x + y| \leq 1\}.$$

Sia (X, Y) una variabile aleatoria uniforme sul quadrato Q

1. trovare la funzione di densità di (X, Y)
2. trovare la funzione di densità marginale di X
3. calcolare la varianza di X
4. Sia Z una variabile aleatoria che assume valori 0 e 1 con uguale probabilità, trovare la distribuzione di

   $$W = X + Z$$

   con Z indipendente da X

Es_1

$X =$ "n° lanci a cui si ferma il gioco"

$T =$ "esce testa"

$C =$ "esce croce"

$X \in \{1, 2, \dots\}$ p.c.

i) $\boxed{P(X=n)} = P(X=n, \Omega) = P(X=n, (T \cup C))$

$= P(X=n \mid T)\,P(T) + P(X=n \mid C)\,P(C)$

$= \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{36}\left(\frac{35}{36}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2}$

$= \boxed{\frac{1}{12}\left[\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + \frac{1}{6}\left(\frac{35}{36}\right)^{n-1}\right]}$ per $n = 1, 2, \dots$

ii) $\boxed{P(T \mid X=2)} = \frac{P(X=2 \mid T)\,P(T)}{P(X=2)}$

$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}{\frac{1}{12}\left[\left(\frac{5}{6}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{35}{36}\right)\right]} = \frac{36}{43} = \boxed{0{,}837}$

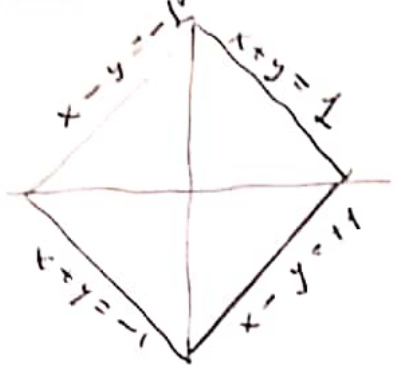
Scansionato con CamScanner

Sia dato il quadrato

$$Q = \{x,y : |x-y| \le 1,\ |x+y| \le 1\}$$

Sia (X,Y) una v.a. uniforme sul quadrato Q

(i) Trovare la funzione di densità $f(x,y)$ di (X,Y)



$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (x,y) \in Q \\ 0 & \text{per } (x,y) \notin Q \end{cases}$$

(ii) Trovare la marginale $f(x)$ di $f(x,y)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_{-x-1}^{x+1} dy = x+1 & \text{per } -1 < x < 0 \\ \frac{1}{2}\int_{x-1}^{1-x} dy = 1-x & \text{per } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Grafico di $f(x)$

(iii) Calcolare la Var X

$$\text{Var}X = \int_{-1}^{0} x^2(x+1)\,dx + \int_{0}^{1} x^2(1-x)\,dx = \frac{1}{6}$$

(iv) Sia Z una v.a. che assume i valori $(0,1)$ con uguale probabilità trovare la distribuzione di

$$W = X + Z$$

con Z indipendente da X.

Scansionato con CamScanner

Per trovare la f.r. di W si osservi che il suo supporto è in $(-1,2)$

Inoltre

$$P(W<w) = P_2\{X+Z<w, (Z=0)\cup(Z=1)\} =$$

$$= P_2\{X+Z<w, Z=0\} + P_2\{X+Z<w, Z=1\}$$

$$= P(Z=0)P(X<w) + P(Z=1)P(X<w-1)$$

$$= \frac{1}{2}\left[P(X<w) + P(X<w-1)\right]$$

Distinguiamo i casi

$-1<w<0$ $\quad$ $0<w<1$ $\quad$ e $\quad$ $1<w<2$

Nel primo caso

$$P(W<w) = \frac{1}{2}P(X<w) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{w}(y+1)\,dy = \frac{(w+1)^2}{2^2}$$

Nel secondo caso

$$P(W<w) = \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0}(y+1)\,dy + \int_{0}^{w}(1-y)\,dy + \int_{-1}^{w-1}(y+1)\,dy\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(y+1)^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \left(-\frac{(1-y)^2}{2}\right)_{0}^{w} + \frac{1}{2}(y+1)^2\Big|_{-1}^{w-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{(1-w)^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{w^2}{2}\right] = \frac{1}{2}(1+w)$$

Nel terzo caso

$$P(W<w) = \frac{1}{2}\left[\underbrace{\int_{-1}^{0}(y+1)\,dy + \int_{0}^{1}(1-y)\,dy} + \int_{-1}^{0}(y+1)\,dy + \int_{0}^{w-1}(1-y)\,dy\right]$$

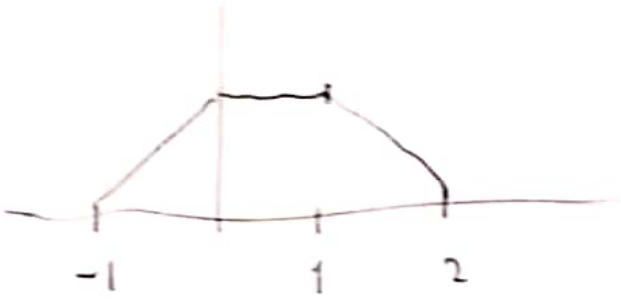
$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2} + \left(-\frac{(1-y)^2}{2}\right)_{0}^{w-1}\right] = \frac{1}{2}\left[2 - \frac{1}{2}(2-w)^2\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{2^2}(2-w)^2 \qquad 1<w<2$$

Scansionato con CamScanner

La densità di W è:

$$f(w) = \begin{cases} \frac{w+1}{2} & -1 < w < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 < w < 1 \\ \frac{2-w}{2} & 1 < w < 2 \end{cases}$$



Il v.m di W è pari a

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} w(w+1)\,dw + \frac{1}{2}\int_{0}^{w} w\,dw + \frac{1}{2}\int_{1}^{2} w(2-w)\,dw = \frac{1}{2}$$

Si controlla

$$EW = EX - EZ = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Scansionato con CamScanner