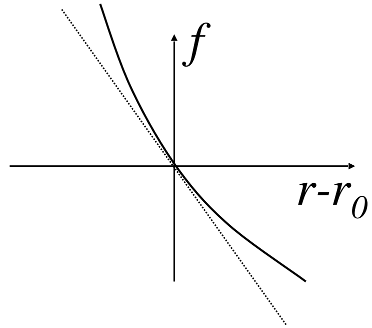
Molle e legge di Hooke

Da dove trae origine il comportamento delle molle?

Il comportamento delle molle è conseguenza di una proprietà generale dei materiali elastici, che ha origini microscopiche:

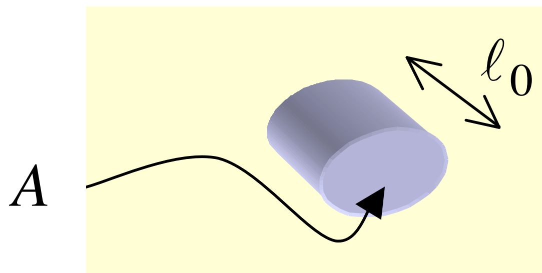
se un corpo non è sollecitato ogni molecola si trova in equilibrio sotto l'azione complessiva delle molecole circostanti, che esercitano una forza di richiamo, ossia una forza che cambia segno passando per la posizione di equilibrio r_0;



sviluppando in serie si ha $f(r) \simeq \left.\frac{df}{dr}\right|_{r_0} (r - r_0) = -C(r - r_0)$

Secondo quanto abbiamo visto per le molle in serie e in parallelo, l'effetto della tensione su un blocco di materiale elastico (per esempio un filo di lughezza l_0 e di sezione A sarà proporzionale alla superficie e inversamente proporzionale alla lunghezza:

Essendo $\frac{r - r_0}{r_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$ si ha $T = -Y\frac{A}{l_0}(l - l_0) = -kx$



Il coefficiente di proporzionalità Y prende il nome di modulo di Young

Modulo di Young

$$T = -Y\frac{A}{l_0}x \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{l_0} = \frac{T}{YA}$$

Valori tipici del modulo di Young

nylon 0.4 10^{10} N/m^2

acciaio 22 10^{10} N/m^2

Limiti di validità della legge di Hooke:

limite di elasticità

- linearità
- deformazione permanente

carico di rottura

Valori tipici del carico di rottura, T_R/A:

nylon 3 10^8 N/m^2

acciaio 4 10^8 N/m^2

$$T = -YA\frac{x}{l_0} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x_R}{l_0}\right| = \frac{T_R}{A}\frac{1}{Y}$$

valori tipici di x_R/l_0:

nylon 0.075 = 7%

acciaio 0.002 = 0.2%

esempio: appendiamo una massa m ad un filo di sezione A di un materiale che ha un certo Y

$m = 1$ kg

$T = mg = 9.8$ N

$Y = 10^{10}$ N/m^2

$A = 1$ mm^2

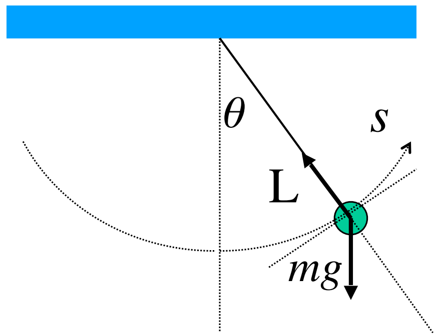
$$\frac{x}{l_0} \simeq \frac{10\,\mathrm{N}}{10^{10}\,\mathrm{N/m^2}\ 10^{-6}\,\mathrm{m^2}} = 10^{-3}$$

Sforzi di taglio (FMUV 8.11)

Nel caso della molla ad elica, l'allungamento non è dovuto alla trazione elastica, ma allo scorrimento di ogni strato del filo metallico di cui è costituita la molla rispetto agli strati contigui. La reazione elastica avviene dunque rispetto ad una forza "di taglio".

Un caso particolare di sforzo di taglio è la reazione elastica alla torsione di un filo, che permette di osservare grandi rotazioni anche in presenza di forze di minima entità (bilancia di torsione, usata da Cavendish alla fine del settecento per misurare per la prima volta la forza di gravitazione tra due masse in laboratorio, e da Coulomb per lo studio delle azioni tra cariche elettriche)

Pendolo semplice **(FMUV 5.4)**



- traiettoria circolare di raggio pari alla lunghezza L
- ascissa curvilinea lungo la circonferenza
- scomposizione delle accelerazioni $\vec{a} = \ddot{s}\hat{u}_t + \frac{\dot{s}^2}{L}\hat{u}_n$

che proiettata sulla tangente dà $m\ddot{s} = -mg\sin\vartheta = -mg\sin\frac{s}{L}$

(perché il segno meno? la componente di mg è negativa quando s è positivo e viceversa).

La legge del moto si può approssimare sviluppando in serie (piccolo angolo)

$$\sin\frac{s}{L} \simeq \sin\frac{s}{L}\bigg|_{s=0} + \cos\frac{s}{L}\bigg|_{s=0}\frac{s}{L} = \frac{s}{L}$$

ossia $m\ddot{s} = = -mg\frac{s}{L}$, la cui soluzione è

$s(t) = s_{max}\cos(\omega t + \varphi)$ o $\vartheta(t) = \vartheta_{max}\cos(\omega t + \varphi)$ con $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

ω non dipende dalla massa

Come si realizza $\varphi = 0$?

Si noti anche che la pulsazione non è la velocità angolare: $\omega \neq \dot{\vartheta}$!

Pendolo semplice (2)

L'altra proiezione $R - mg\cos\vartheta = m\dfrac{\dot{s}^2}{L}$ permette di calcolare la reazione vincolare, ma non ha influenza sul moto.

Pulsazione e periodo $$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

dipendono solo dalla lunghezza del pendolo (isocronismo del pendolo), non dipendono dalla massa né dalle condizioni iniziali.

L'indipendenza dalle condizioni iniziali è valida solo sotto l'approssimazione di piccolo angolo.

Cosa vuol dire "piccolo angolo"? Possiamo valutarlo dallo scostamento ΔT del periodo effettivo dal valore sopra determinato:

$$30^0 \rightarrow \frac{\Delta T}{T} \simeq 2\,\% \qquad 10^0 \rightarrow \frac{\Delta T}{T} \simeq 0.2\,\%$$

Rispetto ad una molla, la indipendenza della frequenza dalla massa discende dalla equivalenza tra massa inerziale e gravitazionale.