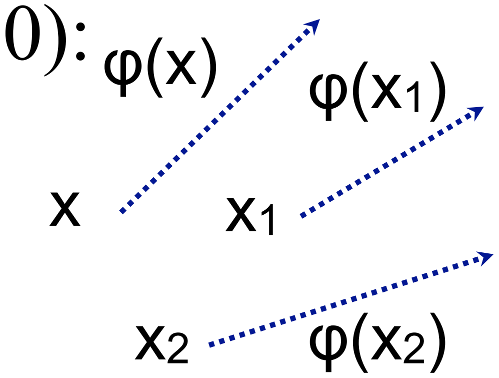
Luciano Maiani:
Lezione Fermi 19
La teoria di C. N. Yang e R. Mills: un'idea in cerca di applicazione

1. Le simmetrie dei campi
2. Simmetrie e leggi di conservazione
3. No spooky Action-at-a Distance
4. La costruzione della Teoria di Yang e Mills
5. 20 anni dopo...: QCD !
6. Riassumendo

1. Le simmetrie dei campi

- Gli enti dinamici della nostra fisica sono i ***campi*** (cfr. Lez. 10):
  - funzioni del punto dello spazio tempo, $\varphi(\mathbf{x}, t) = \varphi(x)$
  - sede di oscillazioni che si propagano nello spazio e nel tempo
  - onde, nella fisica classica, onde e corpuscoli, nella fisica quantistica



- ci sono diversi tipi di campo: dell’elettrone, del quark up, del fotone,...etc. lo stato del mondo e’ descritto dallo stato in cui si trova ciascuno dei campi fondamentali
- il protone e’ esso stesso una configurazione dei campi u(x) e d(x) e dei gluoni
- La dinamica e’ descritta dall’ Azione, che e’ funzione dei campi
- piu’ precisamente, A e’ un ***funzionale***: un oggetto che dipende da tutti i valori del campo in una data regione dello spazio tempo
- in fisica classica, l’Azione e’ un ***numero reale*** (per ogni configurazione dei campi), che assume il valore minimo per le configurazioni che si realizzano in natura (Principio di Minima Azione, Maupertuis, Lagrange, etc.)
- in fisica quantistica l’Azione e’ un oggetto essenzialmente reale (in gergo: un operatore hermitiano) che soddisfa anch’esso un principio di minimo.

Componenti e tipi diversi di campi

- Il campo elettrico e' rappresentato da un vettore, **E**(x), un oggetto a ***tre componenti***, e cosi' il campo magnetico e il potenziale vettore;
- le diverse componenti di un campo sono necessarie per descrivere lo spin;
- ad es. i campi associati all'elettrone o al quark up hanno 4 componenti, 2 associate allo spin di elettrone e 2 allo spin del positrone (lo stesso vale per il campo del quark up)
- una particella di spin 0 e neutra e' descritta da un campo reale con una sola componente, $\varphi(x)= \varphi(x)^*$
- se e' carica, e' descritta da un campo complesso $\varphi(x)= \varphi_1(x)+ i\, \varphi_2(x)$, con $\varphi_{1,2}(x)$ reali;

- in natura, osserviamo diversi campi con lo stesso spin, ad es. spin=1/2, (cfr. Lez. 15): elettrone e neutrino, quark up qe quark down, etc.
- e ipotizzato simmetrie che li collegano
- questo e' il tema di oggi

Rotazioni

- Immaginiamo di stare in una regione dello spazio interplanetario, lontano dai corpi celesti (Terra, Sole, pianeti), per cui possiamo trascurare i loro effetti gravitazionali;
- in questa regione, i campi assumeranno il loro stato fondamentale (nessuna eccitazione presente): lo ***stato di vuoto***;
- adesso mettiamo degli apparati in grado di generare dei campi (magneti, cariche, macchine acceleratrici), secondo una certa configurazione $\varphi(\mathbf{x}, t_0) = \varphi(\mathbf{x})$ (lavoriamo ad un tempo fisso che non scriviamo per semplicita');
- se ruotiamo tutti gli apparati intorno ad un certo asse per un certo angolo, avremo una nuova configurazione di campi, il campo "ruotato", chiamiamola $\varphi_R(\mathbf{x})$ dove R indica quale rotazione abbiamo fatto;
- ovviamente, se conosciamo $\varphi(\mathbf{x})$ ed R, possiamo ricostruire $\varphi_R(\mathbf{x})$ anche senza fare fisicamente la rotazione dei magneti, cariche, etc.; scriviamo $\varphi_R(\mathbf{x})=R[\varphi(\mathbf{x})]$ dove R[..] indica questa operazione sul campo $\varphi(\mathbf{x})$

come si ruotano i campi

- La formula classica per il campo elettrico ruotato e':
$$E_R(\mathbf{x})^i = \sum_j R^i_j E^j(R^{-1}\mathbf{x}) = R^i_j E^j(R^{-1}\mathbf{x})$$
- La formula esprime in primo luogo il fatto che il campo in x e' collegato alle componenti del campo nel punto che, con la rotazione, e' finito in x (cioe' il punto R^{-1} x);
- inoltre, le componenti di E_R (x) sono sovrapposizioni lineari delle componenti di E(R^{-1} x) con una matrice che dipende dalla particolare rotazione;
- la relazione lineare assicura che se il campo prima della rotazione e' una sovrapposizione di due campi che interferiscono, il campo ruotato sara' ***la stessa*** sovrapposizione dei due campi ruotati, in modo che le frange di interferenza associate a E_R si ottengano ruotando le frange di interferenza associate ad E.
- Per analoghi motivi, la relazione lineare si generalizza a tutti i campi, utilizzando matrici che "rappresentano" la rotazione nello spazio delle componenti del campo: $\phi^\alpha_R(\mathbf{x}) = \Lambda^\alpha_\beta(R)\ \phi_\beta(R^{-1}\mathbf{x})$
- Possiamo anche considerare cambiamenti di sistema di riferimento piu' complessi: mettiamo tutti gli apparati su un'astronave... devono valere leggi di trasformazione analoghe.

dettagli piu' matematici

- La forma delle matrici $\Lambda(R)$ e' vincolata dalla condizione che esse soddisfino le stesse leggi di composizione delle rotazioni
- se eseguiamo due rotazioni, R_1 e R_2, in sequenza, la rotazione complessiva e'
  - $R= R_1 * R_2$
- e lo stesso deve accadere per i campi:
  - $\Lambda(R)= \Lambda(R_1 R_2)= \Lambda(R_1) \Lambda(R_2)$
- le matrici $\Lambda(R)$ sono una "rappresentazione" delle trasformazioni R, (cfr. Lez. 10)
- in parallelo alla trasformazione dei campi, si devono trasformare anche gli stati fisici
- secondo E. Wigner, la trasformazione degli stati fisici deve essere prodotta da un operatore U(R) che deve soddisfare due condizioni:
  - $U(R)= U(R_1 R_2)= U(R_1) U(R_2)$ (conservazione dei prodotti)
  - U(R)=Operatore unitario o Antiunitario (conservazione delle probabilita')

2. Simmetrie e leggi di conservazione

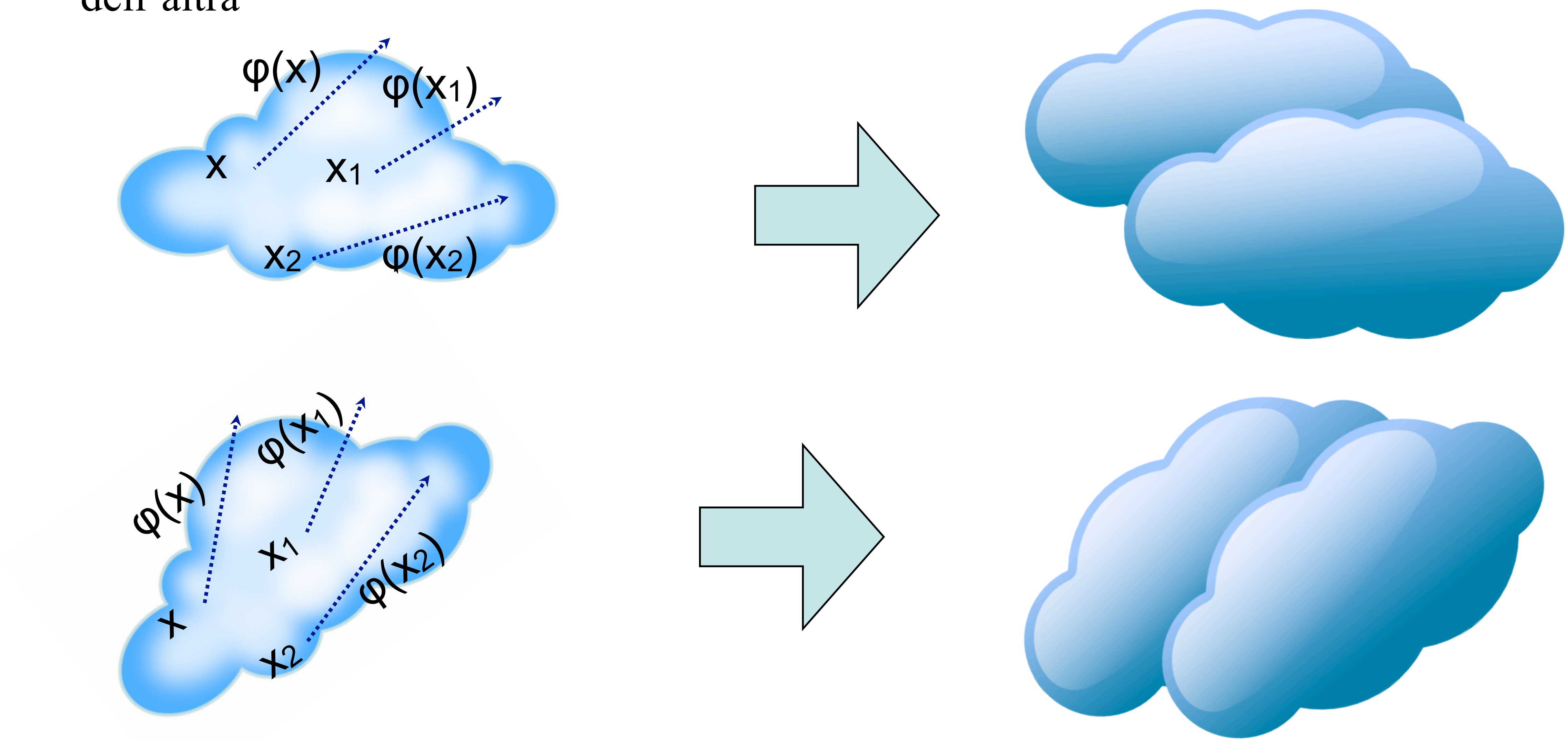
R. P. Feynman, The Character of the Physical Law

Suppose that physics, or rather nature, is considered analogous to a great chess game with millions of pieces in it, and we are trying to discover the laws by which the pieces move. The great gods who play this chess play it very rapidly, and it is hard to watch and difficult to see. However, we are catching on to some of the rules, and there are some rules which we can work out which do not require that we watch every move.

- sono le ***leggi di conservazione***, che ci permettono di riposare qualche istante: sappiamo che le mosse non possono cambiare il valore dell' energia, del momento angolare, della carica elettrica e cosi' via
- la relazione che lega le simmetrie (rotazioni, traslazioni nello spazio e nel tempo, etc.) alle leggi di conservazione e' stata individuata nel secolo scorso da Emmy Noether, fisica matematica tedesca, ed e' uno degli aspetti piu' affascinanti della fisica moderna

Dinamica...

- Nello spazio interplanetario, lontano dai corpi celesti, non ci sono direzioni privilegiate, la dinamica dei campi e dei campi ruotati deve essere la stessa:
  - Azione (φ)=Azione(φ_R)
  - conseguenza: le due configurazioni evolvono nel tempo restando sempre una la ruotata dell'altra



- Questa e' la simmetria. Da essa discende (secondo il teorema di E. Noether) la conservazione del momento angolare (per i pianeti, la seconda legge di Keplero).

Una generalizzazione coraggiosa

- Possiamo ipotizzare trasformazioni piu' complicate della semplice rotazione degli apparati
- ad es. possiamo cambiare le nostre macchine in modo che, dove producevano un protone adesso producono un neutrone, e viceversa: lo scambio quark up $\rightleftarrows$ quark down
- oppure sostituire quark up e quark down con le combinazioni (con U matrici unitarie)

$$q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \to q_U = Uq = U \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

- ***Se l'Azione e' invariante*** sotto questa trasformazione, allora abbiamo una ***simmetria***: corrisponde al gruppo SU(2) ed e' la simmetria di Spin Isotopico (Lez. 6, 8), rispettata in natura con ottima approssimazione
  - Nota: l'Azione e' invariante se q compare sempre moltiplicato per il suo complesso coniugato, come avviene nella teoria di Dirac per campi di spin 1/2
- ... e delle conseguenti leggi di conservazione, per il Teorema di Noether.

La prima generazione di quark e leptoni e le trasformazioni che collegano i diversi tipi di campi, sotto cui pensiamo che l'Azione sia invariante

1. Materia ordinaria (Galassie, la Terra, noi...) :

QUARKS
(Gell-Mann, Zweig, 1962)

LEPTONI

$$\begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix}$$

Colore: $SU(3)$

$$\begin{bmatrix} \nu_e \\ e \end{bmatrix}$$

Sapore: $SU(2)$

Protone = [uud]
Neutrone = [ddu]

$N \to P + e^- + \nu_e$ (Pauli, Fermi, ≈ 1930)

•Le trasformazioni sono rappresentate da matrici unitarie:

$$\Psi(x) \to U\Psi(x) \approx (1 + i\sum_{i=1}^{N} \epsilon_i T^i)\Psi(x)$$

•Le trasformazioni infinitesime (vicine all'identita') sono individuate da N generatori infinitesimi che caratterizzano le rispettive Algebre di Lie (Lez. 8). SU(2): N=3, SU(3): N=8.

3. No Spooky Action at a Distance !

- Se vogliamo tenere lontano lo spettro dell' "Azione-a-distanza", dobbiamo chiedere che le simmetrie tra tipi diversi di campi siano simmetrie locali, cioe' ***simmetrie di gauge***, proprio come l'invarianza di gauge dell'Elettrodinamica Quantistica (QED);
- dobbiamo quindi richiedere che l'Azione sia invariante per trasformazioni locali, diverse da punto a punto dello spazio-tempo:

$$\Psi(x) \to \Psi(x)' = U(x)\,\Psi(x)$$

- Questo e' in conflitto con la necessita' di accoppiare tra loro i campi in punti diversi (cioe' di introdurre nell'Azione termini che contengono la derivata dei campi)
- ma si puo' risolvere (come in QED) introducendo dei campi vettoriali , W_μ^i (uno per ognuno degli N generatori dell'algebra di Lie) e formando la "derivata covariante" dei campi Ψ,
- il risultato e' che se abbiamo un'Azione, $A(\Psi, \partial_\mu \Psi)$ invariante per trasformazioni globali, la funzione $A(\Psi, D_\mu \Psi)$, ottenuta con la sostituzione

$$\partial_\mu \Psi \to D_\mu \Psi$$

e' invariante per trasformazioni locali.

dettagli matematici

- la trasformazione di $\partial_\mu \Psi$ contiene un termine irregolare:

$$[\Delta\Psi(x)]' = U(x+\Delta x)\Psi(x+\Delta x) - U(x)\Psi(x) =$$
$$= (\Delta U)\Psi + U(\Delta\Psi) = U\left[\Delta\Psi + (U^{-1}\Delta U)\Psi\right]$$

$$[\partial_\mu\Psi]' = U\left[\partial_\mu\Psi + (U^{-1}\partial_\mu U)\Psi\right]$$

- introduciamo i campi W_μ^i (uno per ogni generatore T^i dell'algebra di Lie) con una legge di trasformazione analoga a QED, g e' una costante di accoppiamento analoga alla carica elettrica e:

$$ig\sum_{i=1}^{N} W_\mu^i \cdot T^i = ig(W_\mu \cdot T)$$
$$[igW_\mu \cdot T]' = igU(W_\mu \cdot T)U^{-1} + U\partial_\mu U^{-1}$$

- la derivata covariante: $D_\mu\Psi = (\partial_\mu + igW_\mu T] \Psi$ si trasforma come Ψ:

$$[\partial_\mu\Psi + ig(W_\mu \cdot T)\Psi]' =$$
$$U\left[\partial_\mu\Psi + (U^{-1}\partial_\mu U)\Psi\right] + \left[igU(W_\mu \cdot T)U^{-1} + U\partial_\mu U^{-1}\right]U\Psi =$$
$$= U\left[\partial_\mu\Psi + (U^{-1}\partial_\mu U)\Psi + ig(W_\mu \cdot T)\Psi + (\partial_\mu U^{-1}U)\Psi\right] =$$
$$= U\left[\partial_\mu\Psi + ig(W_\mu \cdot T)\Psi\right]$$

- l'ultimo passaggio si ottiene usando la relazione:

$$U^{-1}(\partial_\mu U) + (\partial_\mu U^{-1})U = \partial_\mu(U^{-1}U) = \partial_\mu(1) = 0$$

- se $A(U\Psi, U\partial_\mu \Psi) = A(\Psi, \partial_\mu \Psi)$ per U costante, allora $A(U\Psi, UD_\mu \Psi) = A(\Psi, D_\mu \Psi)$ per $U=U(x)$.

4. La teoria di Yang-Mills (1954)

- Dobbiamo aggiugere all'Azione dei campi di materia, $A(\Psi, D_\mu \Psi)$, l'Azione che descriva la propagazione dei campi W (d'ora in poi "campi di gauge" o "campi di Yang-Mills")
- In QED, questa azione e' il quadrato del tensore di Maxwell,

$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$, che e' invariante per trasformazioni di gauge

- Yang e Mills hanno individuato l'analogo del tensore di Maxwell nella forma

$$G^i_{\mu\nu} = \partial_\nu W^i_\mu - \partial_\mu W^i_\nu + g f_{ijk} W^j_\mu W^k_\nu$$

•che permette di costruire un'Azione, $A_{YM}(G_{\mu\nu})$ anch'essa invariante

•la conclusione e' un'Azione totale, materia piu' campi di YM, della forma:

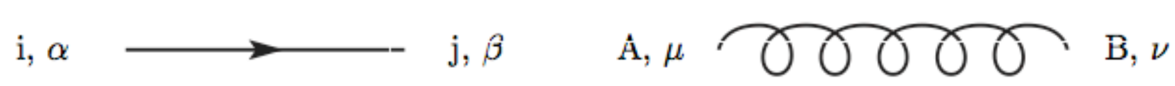
$A_{tot}(\Psi, D_\mu \Psi, G_{\mu\nu}) = A(\Psi, D_\mu \Psi) + A_{YM}(G_{\mu\nu})$

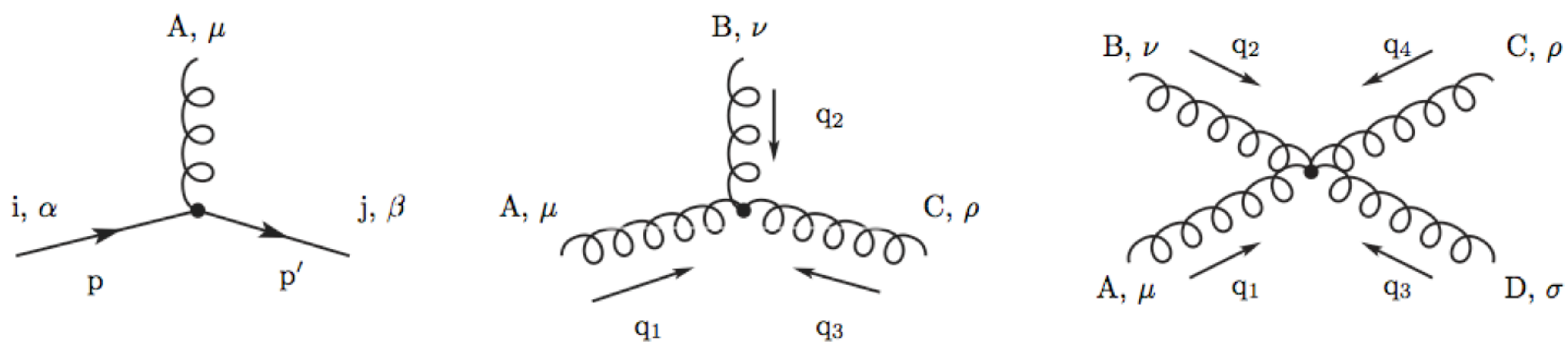
•che descrive le interazioni della materia con i campi di YM in termini di una sola costante di accoppiamento, g, come in QED

•a differenza di QED, i campi di YM hanno interazione tra loro, sempre determinata da g.

La simmetria locale determina completamente la dinamica!!!

Le interazioni di YM





- La realizzazione piu' "pura" della teoria di Yang-Mills e' quella delle forze associate alla simmetria di colore, gruppo SU(3)
- in analogia con QED, la teoria di YM del colore prende il nome di QCD (Quantum-Chromo-Dynamics)
- linee solide con freccia: quark di un dato tipo (e.g. up) in tre colori
- linee ondulate: otto campi di YM, spin 1, massa = 0, ***gluoni***
- i quark di differente colore hanno la stessa carica elettrica → i gluoni hanno carica elettrica =0: sono i partoni neutri individuati da Feynman nelle reazioni inelastiche!
- i processi di QCD sono regolati da una sola costante g_s; le probabilita' sono determinate da $\alpha_s = g_s^2/(4\pi)$
- la liberta' asintotica della QCD dice che $\alpha_s \to 0$ a grandi momenti trasferiti

CERN Courier

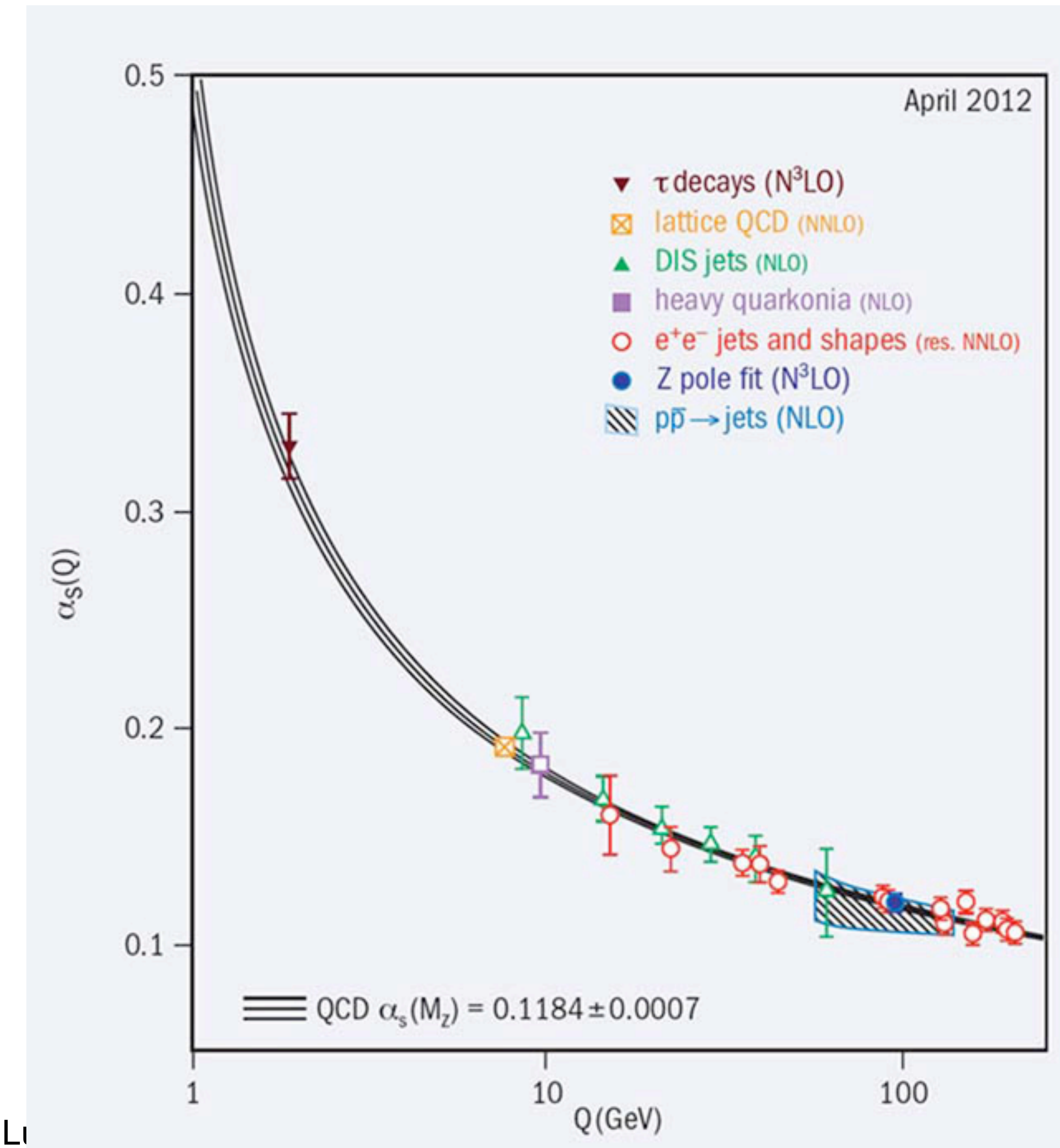
CERN COURIER

Jan 28, 2013

A watershed: the emergence of QCD

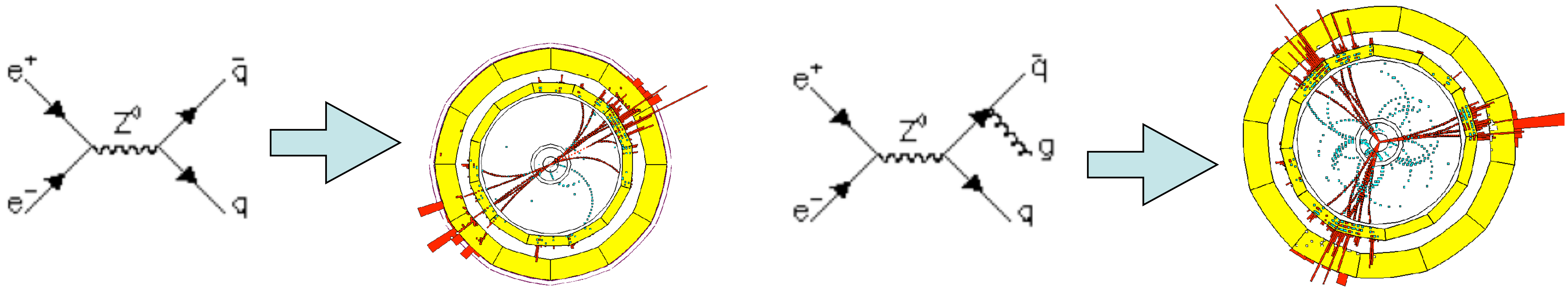
David Gross and Frank Wilczek look back at how QCD began to emerge in its current form 40 years ago.

Quantum Chromo Dynamics: α_s vs. Q^2

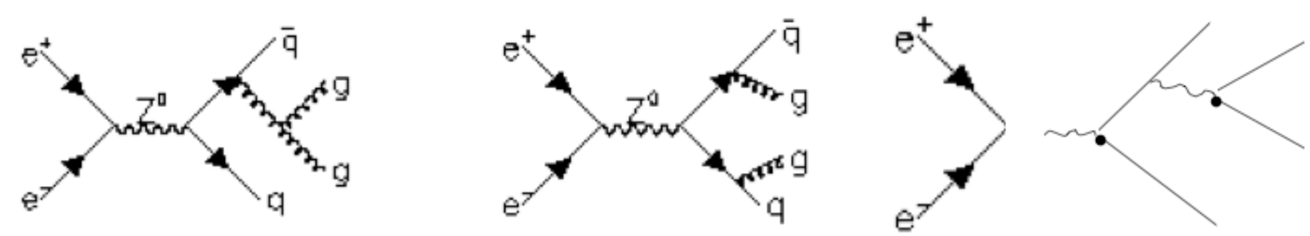


dove sono i quark e i gluoni?

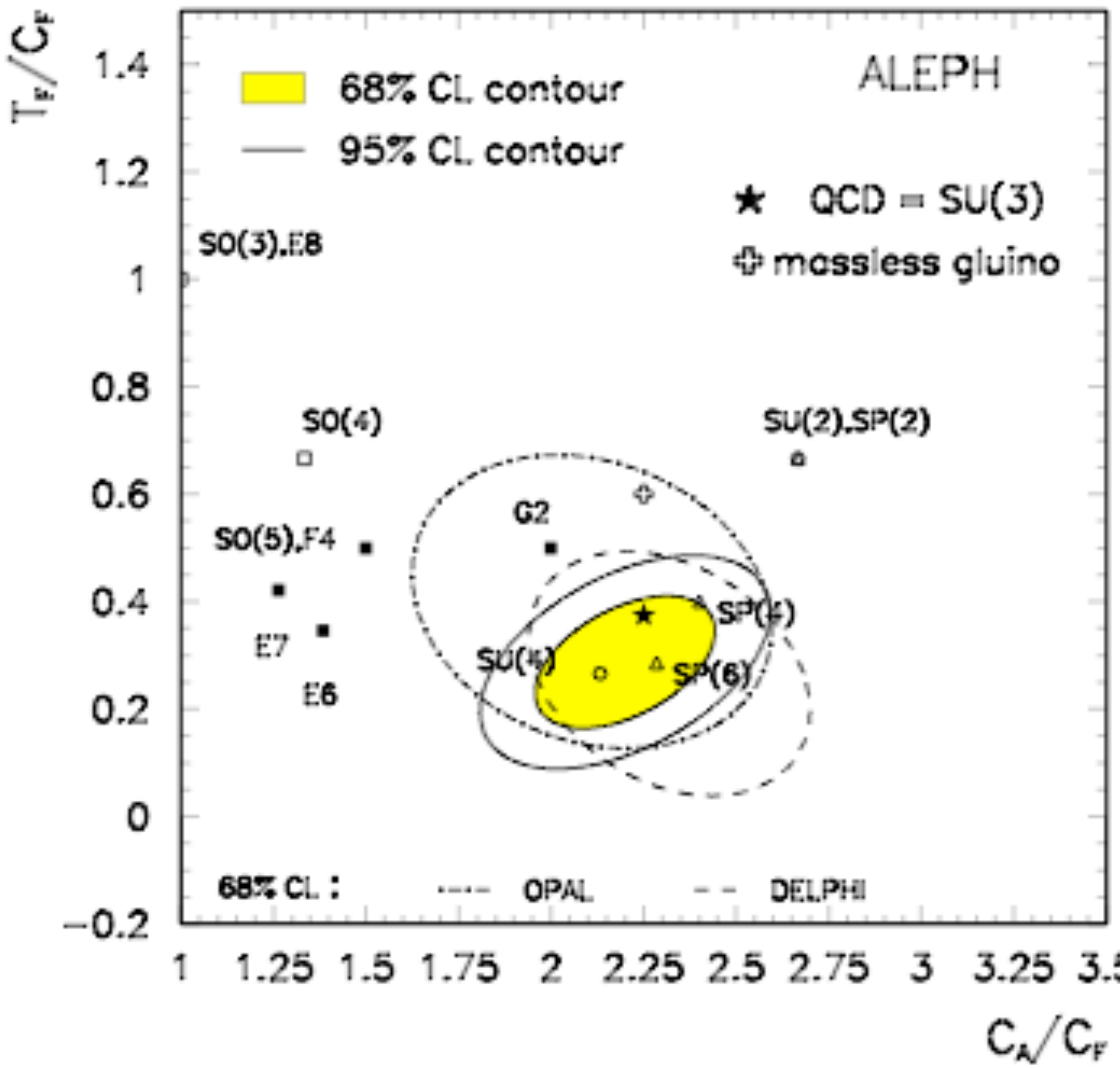
- le annichilazioni e^+e^- sono una sorgente copiosa di quark e di gluoniche appaiono come eventi con 2 o 3 jet di particelle nello stato finale

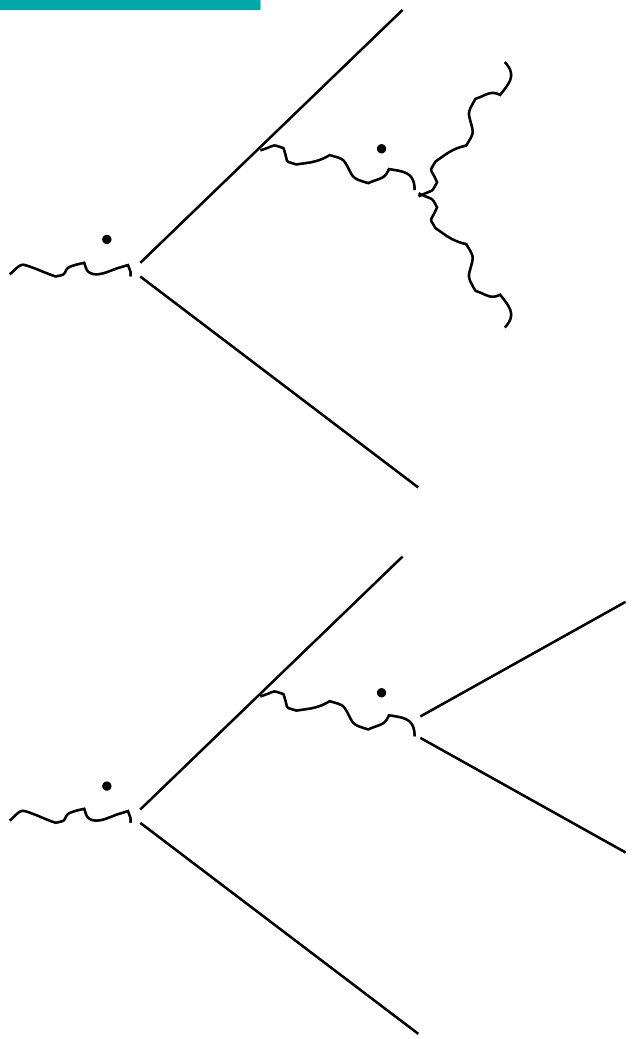


- e' il confinamento, bellezza:
- lo stato finale deve essere neutro di colore..
- ogni partone si circonda di partoni sempre piu' soffici che lo connettono agli altri partoni "duri" e il tutto si trasforma nei mesoni che osserviamo
- dallo studio dei 3 jet possiamo determinare α_s, con i risultati gia' visti
- ci sono anche eventi con 4 jet
- con cui si studia il vertice a 3 gluoni



Il gruppo di colore dagli esperimenti!





La sezione d' urto per 4 jet e' sensibile alla natura del gruppo di colore

Summing up

- La simmetria globale del colore e' stata individuata a partire dal problema della statistica dei quark nei barioni
- confermata dal rapporto R (adroni/mu+mu-) ad Adone e ad energie piu' elevate
- promossa a simmetria di gauge da Han&Nambu
- liberta' asintotica (Gross&Wilczeck, Politzer, 1973) e modello dei partoni
- 20 anni dopo l'articolo di Yang e Mills, la QCD fornisce l'esempio perfetto di come la teoria di campo e la simmetria di gauge possa spiegare la dinamica delle interazioni forti...nel regime in cui l'intensita' si attenua
- dei processi in cui intervengono le interazioni forti nel regime "forte" abbiamo un controllo amcora molto parziale
- ma la rivoluzione della QCD ha stabilito un paradigma in cui questo non e' piu' il problema centrale (T. Kuhn *docet*)

Summing up (continua)

- Negli stessi anni si afferma la descrizione YM delle interazioni elettrodeboli, con l'ingrediente della rottura spontanea (come vedremo nelle prossime lezioni)
- sono dunque TUTTE le forze a livello elementare derivate da un principio di gauge?
- e da una unica simmetria?
- E' il problema della Grande Unificazione, che stimola nuove idee sulla stabilita' della materia e sui problemi astrofisici: nasce la fisica delle Astro-Particelle e si approfondisce la fisica del neutrino
- ... e dal 1973 inizia la stagione delle Grandi Scoperte Sperimentali

La storia continua.
Restate collegati !!!