

## Lezione 1

## La Probabilità

**Scopo del Corso:**

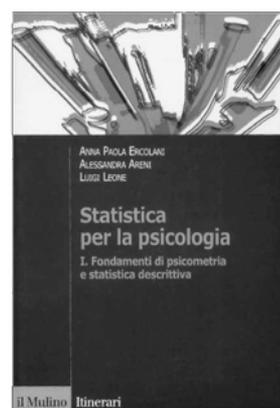
- **Introduzione alla probabilità e alle procedure di inferenza statistica**
- **Introduzione ad alcune importanti tecniche di analisi multivariata dei dati**

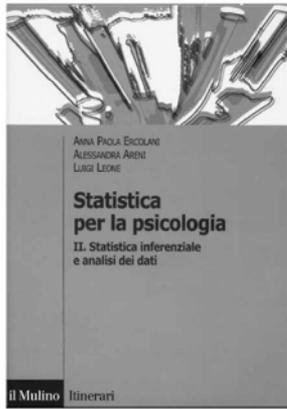
**Organizzazione del Corso e argomenti trattati:**

- **Prima parte: Probabilità e inferenza statistica (5 lezioni)**
- **Seconda parte: Analisi multivariata dei dati (10 lezioni)**

**Prerequisiti:**

- **Quantificazione in psicologia (attendibilità, validità, errore)**
- **Statistica descrittiva (distribuzione di frequenze, media, deviazione standard, standardizzazione, distribuzione normale)**





## Argomenti della lezione:

- ➔ Definizioni
- ➔ Proprietà e principi

## Definizioni

**Prova o  
esperimento aleatorio**

fenomeno in cui  
non c'è una regolarità  
"deterministica"

**EVENTO** ogni possibile risultato  
(o insieme di risultati) di una prova

- ➔ **Semplice:** non scomponibile
- ➔ **Composito:** scomponibile
- ➔ **Successo:** l'evento si verifica
- ➔ **Insuccesso:** l'evento non si verifica

## Definizioni di probabilità

**Problema:**

Qual è la probabilità che si  
verifichi l'evento A "faccia = 5"  
lanciando un dado a sei facce ?

**Probabilità dell'evento A:  
rapporto tra casi favorevoli  
e casi possibili**

**Probabilità che esca il 5  $\Rightarrow P(5) =$   
casi favorevoli/casi possibili =  $1/6$**

**Probabilità dell'evento A**

**Frequenza con cui l'evento  
si verifica in un numero "n" di  
prove sufficientemente grande,  
ripetute nelle medesime  
condizioni**

**Se lanciando 100 volte il dado  
il numero "5" è stato ottenuto  
17 volte,  $P(5) = 17/100$**

## **Proprietà e principi della probabilità**

**1** La probabilità è un numero  
compreso tra 0 e 1

**$0 \leq P(A) \leq 1$  dove:**

- 0**  $\rightarrow$  è la probabilità di un evento  
impossibile
- 1**  $\rightarrow$  è la certezza

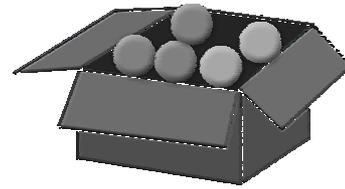
**2** **Eventi indipendenti**

**Due eventi A e B si dicono  
indipendenti se il verificarsi  
dell'uno non modifica  
(ovvero non influenza)  
la probabilità di verificarsi  
dell'altro**

### 3 Eventi non indipendenti

Due eventi A e B non sono indipendenti se il verificarsi dell'uno modifica la probabilità del verificarsi dell'altro

Supponiamo di avere un'urna con 3 palline Rosse e 2 palline Verdi e definiamo:

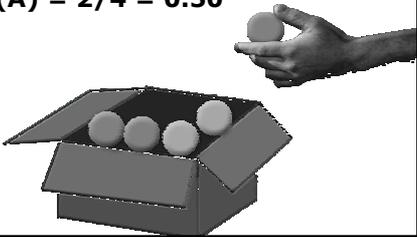


evento A = uscita di una pallina Rossa alla seconda estrazione

#### Estrazione senza reimmissione

La probabilità dell'evento A dipende dal risultato della prima estrazione:

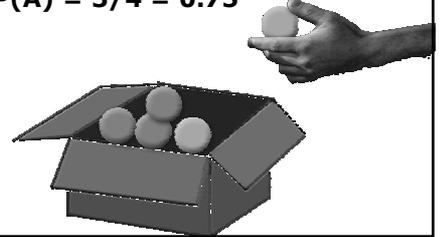
☞ se è uscita una pallina rossa, allora  $P(A) = 2/4 = 0.50$



#### Estrazione senza reimmissione

La probabilità dell'evento A dipende dal risultato della prima estrazione:

☞ se è uscita una pallina verde, allora  $P(A) = 3/4 = 0.75$



#### Estrazione con reimmissione

Le probabilità non si modificano ad ogni estrazione (sempre 5 palline, 3 rosse e 2 verdi)

quindi  $P(A) = 3/5$

Nel primo caso gli eventi sono dipendenti, nel secondo sono indipendenti

### 4 Eventi incompatibili o mutualmente escludentisi

Due eventi A e B si dicono incompatibili o mutualmente escludentisi se il verificarsi dell'uno ESCLUDE la possibilità del verificarsi dell'altro

→ **Evento A = uscita del numero 5  
nel lancio di un dado**



→ **Evento A = uscita del numero 5  
nel lancio di un dado**

→ **Evento B = uscita del numero 4  
nel lancio di un dado**

**I due eventi sono  
incompatibili**



→ **Evento A = uscita di un numero  
pari nel lancio di un dado**

→ **Evento B = uscita del 4 nel  
lancio di un dado**

**I due eventi non sono  
incompatibili**

## **5** Principio della somma

La probabilità del verificarsi di  
due (o più) eventi che si escludono  
a vicenda è uguale alla somma  
delle probabilità del verificarsi  
dei singoli eventi

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$$

**In un mazzo di 52 carte,  
qual è la probabilità di estrarre  
"una donna" o "un re"?**

→ **evento A = estrarre una donna**

→ **evento B = estrarre un re**

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) = 4/52 + 4/52$$

→ **A = estrarre 1 donna da un  
mazzo di 52 carte ⇒  $P(A) = 4/52$**

→ **B = estrarre una carta di picche  
⇒  $P(B) = 13/52$**

**I due eventi non si escludono  
("donna di picche")**

Se sommiamo le due probabilità, la donna di picche viene contata due volte; bisogna sottrarla una volta:

$$P(\text{DONNA o PICCHE}) = 4/52 + 13/52 - 1/52$$

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

## 6 Principio del prodotto

Si applica per calcolare la probabilità che due o più eventi non mutualmente escludentisi si verifichino simultaneamente (o in successione)

Due casi diversi:  
eventi indipendenti    eventi non indipendenti

### 👉 eventi indipendenti

- 📄 Prova: lancio di 2 dadi a sei facce
- 📄 Evento: somma delle due facce=2

**Evento composto:**  
Evento A: dado 1 = 1  
Evento B: dado 2 = 1

I due eventi (A e B) sono indipendenti: la probabilità del verificarsi di A e B contemporaneamente è uguale al prodotto delle singole probabilità

$$P(A \text{ e } B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A \text{ e } B) = P("1" \text{ e } "1") = P(1) \times P(1) = 1/6 \times 1/6$$

### 👉 eventi non indipendenti

- 📄 Prova: estrazione del lotto in una data settimana
- 📄 Evento: i primi due estratti sono numeri pari

**Estrazione senza reimmissione**

La probabilità di ciascun evento successivo è condizionata dai risultati precedenti

Allora il principio del prodotto implica la seguente espressione:

$$P(A \text{ e } B) = P(A) \times P(B|A)$$

**$P(B|A)$  è la probabilità che si verifichi l'evento B condizionato dal verificarsi di A**

**Nell'esempio precedente:**

**Evento A = 1° estratto pari  
Evento B = 2° estratto pari**

**$P(A) = 45/90$ , ma  $P(B)$  è condizionata da A**

**1° estratto pari  $\Rightarrow P(B|A) = 44/89$**

**1° estratto dispari  $\Rightarrow P(B|A) = 45/89$**

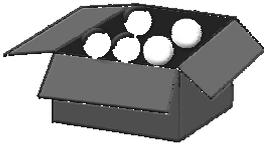
$$\begin{aligned} P(\text{primi 2 estratti pari}) &= \\ P(A \text{ e } B) &= P(A) \times P(B|A) = \\ &= 45/90 \times 44/89 = 0.25 \end{aligned}$$

**Inoltre:**

$$P(B|A) = P(A \text{ e } B) / P(A)$$

## **7** Probabilità composite (prodotto + somma)

**Sia un'urna con 5 palline, di cui  
2 bianche e 3 nere**



**Effettuiamo due estrazioni senza  
reimmissione (eventi non indipendenti)**

**L'evento ottenere una sola  
pallina nera nelle due estrazioni  
risulta dai due eventi seguenti:**

- $\rightarrow$  Prima estrazione nera ( $N_1$ ) e  
Seconda estrazione bianca ( $B_2$ )**
- $\rightarrow$  Prima estrazione bianca ( $B_1$ ) e  
Seconda estrazione nera ( $N_2$ )**

- $\rightarrow$  Prima estrazione nera ( $N_1$ ) e  
Seconda estrazione bianca ( $B_2$ )**

$$\begin{aligned} P(N_1 \text{ e } B_2) &= P(N_1) \times P(B_2|N_1) = \\ &= (3/5 \times 2/4) \end{aligned}$$

- $\rightarrow$  Prima estrazione bianca ( $B_1$ ) e  
Seconda estrazione nera ( $N_2$ )**

$$\begin{aligned} P(B_1 \text{ e } N_2) &= P(B_1) \times P(N_2|B_1) = \\ &= (2/5 \times 3/4) \end{aligned}$$

**Allora l'evento ottenere una  
sola pallina nera ha probabilità:**

$$\begin{aligned} P[(N_1 \text{ e } B_2) \text{ o } (B_1 \text{ e } N_2)] &= \\ P(N_1 \text{ e } B_2) + P(B_1 \text{ e } N_2) &= \\ P(N_1) \times P(B_2|N_1) + P(B_1) \times P(N_2|B_1) &= \\ = (3/5 \times 2/4) + (2/5 \times 3/4) &= 0.60 \end{aligned}$$

## Variabili casuali

Urna con 1 pallina Rossa,  
2 palline Nere e 1 pallina Bianca

Distribuzione di frequenze

Colore	Frequenza	Frequenza Relativa
Rosso	1	$1/4 = .25$
Nero	2	$2/4 = .50$
Bianco	1	$1/4 = .25$

## Variabile statistica

{Rosso, .25}, {Nero, .50}, {Bianco, .25}

Frequenze relative  $\Rightarrow$  Probabilità

Le coppie formate dal colore e dalla  
probabilità costituiscono una

**Variabile casuale o aleatoria**

## Differenza tra Variabile statistica e Variabile casuale

$\rightarrow$  **Variabile statistica:**  
ciò che si è osservato

$\rightarrow$  **Variabile casuale:**  
ciò che potrà accadere

## In generale una Variabile Casuale X è composta da:

$\rightarrow$  i valori "x" che "X" può  
assumere

$\rightarrow$  la probabilità  
[ $P(X=x)$  o  $P(x)$ ] che ogni  
valore x può avere

$\rightarrow$  **Variabili casuali discrete:**  
Conteggio (numero di  
domande corrette in un test)

$\rightarrow$  **Variabili casuali continue:**  
Misurazioni (altezza in cm)

## CONCLUSIONE

$\rightarrow$  **Probabilità: Definizioni,  
proprietà e principi**

$\rightarrow$  **Probabilità composite e  
condizionate**

$\rightarrow$  **Variabili casuali**