moto armonico (2)

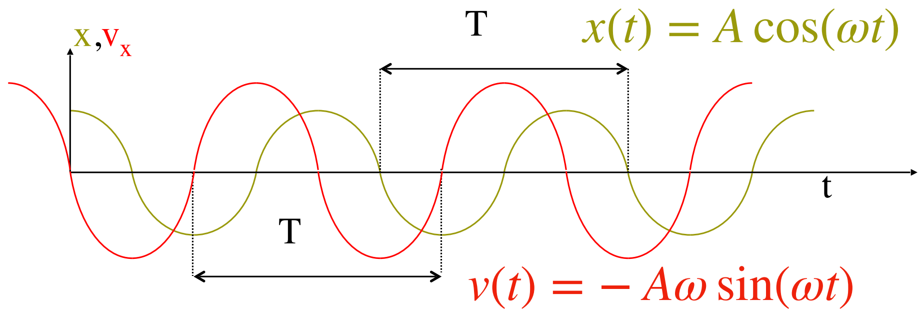
Possiamo trovare immediatamente velocità e accelerazione del moto armonico $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$:

$$\dot{x} = v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi/2)$$

$$\ddot{x} = a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x(t)$$

La velocità è "sfasata", anticipata di 90º rispetto alla posizione

L'accelerazione è sfasata di 180º



La legge oraria del moto armonico può essere considerata la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t); \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

In altri termini, tutte le volte che l'accelerazione è proporzionale alla posizione cambiata di segno, il moto è armonico intorno all'origine dell'asse delle x (e viceversa)

moto armonico (3)

Dalle espressioni di posizione e velocità in funzione del tempo:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

possiamo determinare l'ampiezza A e la fase φ_0 (le costanti di integrazione dell'equazione differenziale) conoscendo posizione e velocità iniziali:

$$x(0) = x_0 = A\cos\varphi_0 \qquad v(0) = v_0 = -\omega A\sin\varphi_0$$

dividendo membro a membro otteniamo

$$\frac{x_0}{v_0} = -\frac{\cos\varphi_0}{\omega\sin\varphi_0} \quad\Rightarrow\quad \tan\varphi_0 = -\frac{v_0}{\omega x_0}$$

mentre quadrando e sommando abbiamo

$$A^2\cos^2\varphi_0 + A^2\sin^2\varphi_0 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} \quad\Rightarrow\quad A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

Notiamo anche che se $x_0 \neq 0,\ v_0 = 0$ possiamo scrivere $x(t) = x_0\cos(\omega t)$

mentre se $x_0 = 0,\ v_0 \neq 0$ possiamo scrivere $x(t) = \dfrac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$

Problema inverso della cinematica (FMUV 3.16)

Dato $\vec{r}(t)$, abbiamo visto come si possono determinare la velocità e l'accelerazione $\vec{v}(t)$ e $\vec{a}(t)$.

Spesso ci possiamo trovare nella situazione opposta, nella quale conosciamo $\vec{v}(t)$ o $\vec{a}(t)$ e vogliamo derivare $\vec{r}(t)$.

Questo problema è detto (con ovvio significato) "problema inverso della cinematica", e lo abbiamo già affrontato per i moti uniformi.

Nel caso generale, se conosciamo $\vec{v}(t)$, possiamo integrare la relazione

$d\vec{r} = \vec{v}\,dt$: $$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt + \vec{r}(t_0)$$

dove l'integrale di un vettore è un vettore che ha come componenti gli integrali delle tre componenti.

Se conosciamo l'accelerazione, possiamo ricavare da essa nello stesso modo la velocità $\vec{v}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt + \vec{v}(t_0)$ e sostituirla nell'integrale precedente per ottenere $\vec{r}(t)$

moto balistico (FMUV 3.17)

Nelle vicinanze della superficie terrestre tutti i corpi in “caduta libera” si muovono con la stessa accelerazione, detta accelarazione di gravità o g, verticale e diretta verso il basso.

Poiché non ci sono accelerazioni nelle altre due coordinate, data la velocità iniziale v_0, il moto si svolge tutto sul piano individuato da g e da v_0 e può essere descritto da due coordinate cartesiane x ed y.

Il moto sarà quindi la composizione di un moto rettilineo uniforme in x ed un moto uniformemente accelerato in y: $\overrightarrow{g} \equiv -g\hat{j}$

Conoscendo l’accelerazione, possiamo ricostruire la velocità e la posizione in funzione del tempo (problema inverso):

$$\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{v}(0) + \int_0^t \overrightarrow{g}\,dt = \overrightarrow{v}_0 + \overrightarrow{g}\int_0^t dt = \overrightarrow{v}_0 + \overrightarrow{g}\,t$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \overrightarrow{v}(t)dt = \vec{r}_0 + \int_0^t (\overrightarrow{v}_0 + \overrightarrow{g}\,t)dt = \vec{r}_0 + \overrightarrow{v}_0 t + \frac{1}{2}\overrightarrow{g}\,t^2$$

moto balistico (2)

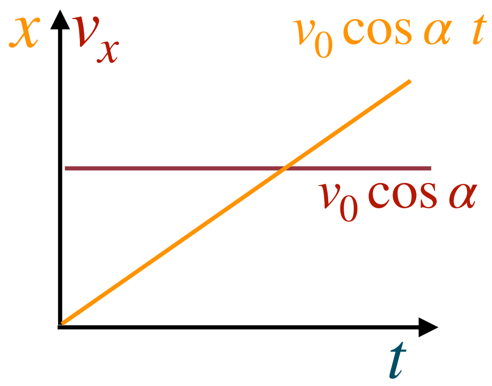
Ad esempio, consideriamo un punto materiale (un proiettile) che inizialmente sia sparato dall'origine ad un certo angolo (alzo) α

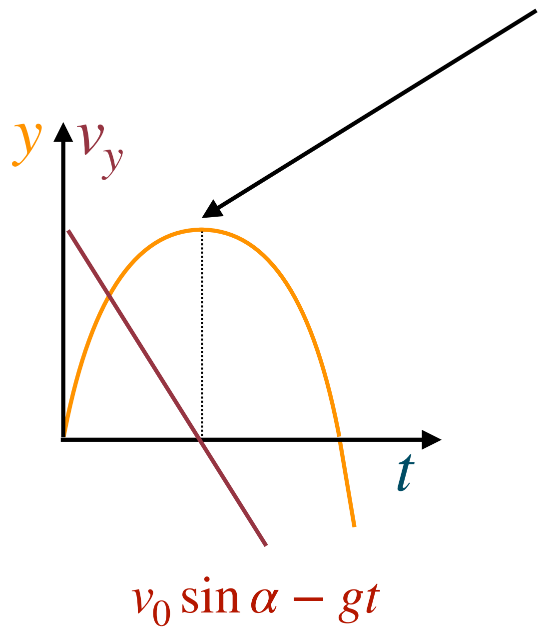
$$\vec{v}_0 \equiv (v_0 \cos\alpha; v_0 \sin\alpha), \quad \vec{r}_0 \equiv (0;0)$$

$$v_x(t) = v_{0x} = v_0 \cos\alpha \qquad v_y(t) = v_{0y} - gt = v_0 \sin\alpha - gt$$

$$x(t) = v_0 \cos\alpha \ t \qquad y(t) = v_0 \sin\alpha \ t - \frac{1}{2} g t^2$$

moto parabolico dei proiettili





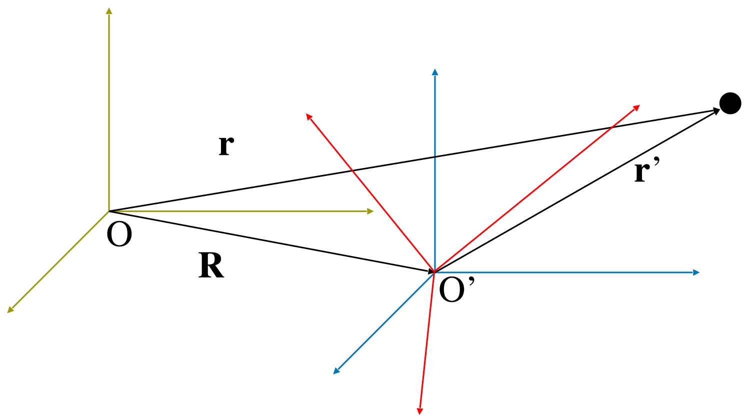
massimo di y:

$$\frac{dy}{dt} = 0$$

$$v_0 \sin\alpha = gt$$

cinematica dei moti relativi (FMUV 3.18, 3.19, 3.24)

Come si trasformano le leggi del moto in sistemi di riferimento diversi?



$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,'$$

in particolare in sistemi di riferimento in moto (traslatorio e/o rotatorio) uno rispetto all'altro?

Per una semplice traslazione: $\vec{R} = \vec{R}(t); \quad \hat{i} = \hat{i}'; \; \hat{j} = \hat{j}'; \; \hat{k} = \hat{k}'$

e derivando rispetto al tempo: $\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}\,' \; ; \quad \vec{a} = \vec{A} + \vec{a}\,'$

Se c'è anche rotazione, nella derivazione dei vettori si deve tenere conto anche delle derivate dei versori

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{i}; \quad \frac{d\hat{j}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{j}; \quad \frac{d\hat{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{k}$$

derivata di un vettore in due riferimenti in moto

dato un vettore $\vec{w}$, consideriamo la sua rappresentazione $\vec{w}'$ in un riferimento in moto rototraslatorio rispetto al primo:

$$\vec{w}(t) \equiv \vec{w}'(t) = w'_x(t)\hat{i}'(t) + w'_y(t)\hat{j}'(t) + w'_z(t)\hat{k}'(t)$$

se deriviamo rispetto al tempo nel primo sistema di riferimento, dobbiamo tenere conto anche della derivata dei versori:

$$\left(\frac{d\vec{w}'(t)}{dt}\right)_S = \dot{w}'_x\hat{i}' + \dot{w}'_y\hat{j}' + \dot{w}'_z\hat{k}' + w'_x\frac{d\hat{i}'}{dt} + w'_y\frac{d\hat{j}'}{dt} + w'_z\frac{d\hat{k}'}{dt}$$

i primi tre termini rappresentano la derivata di $\vec{w}'$ nel secondo sistema di riferimento, gli ultimi tre contengono le derivate dei versori, che si possono esprimere con tre relazioni di Poisson in cui compare la stessa velocità angolare $\vec{\omega}$ (come è dimostrato in FMU 3.28):

$$w'_x\frac{d\hat{i}'}{dt} + w'_y\frac{d\hat{j}'}{dt} + w'_z\frac{d\hat{k}'}{dt} = \vec{\omega} \times (w'_x\hat{i}' + w'_y\hat{j}' + w'_z\hat{k}')$$

per cui: $\left(\frac{d\vec{w}'}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{w}'}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{w}'$