Richiami sul prodotto vettoriale (FMUV 2.8)

Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, il loro prodotto vettoriale, $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, è un vettore di modulo $c = ab\,|\sin\vartheta\,|$, perpendicolare al piano individuato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$, di verso diretto come il pollice della mano destra quando l'indice è diretto come $\vec{a}$ e il medio è diretto come $\vec{b}$.

Due vettori tra loro paralleli hanno prodotto vettoriale nullo.

Due vettori ortogonali hanno il modulo del prodotto vettoriale pari al prodotto dei moduli (e quindi massimo)

Il prodotto vettoriale è distributivo: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

Il prodotto vettoriale è anticommutativo: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

Prodotto vettoriale tra i versori degli assi:

$$\hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{k},\ \ \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{\imath},\ \ \hat{k} = \hat{\imath} \times \hat{\jmath}$$

Prodotto vettoriale (2)

Componenti del prodotto vettoriale (FMUV es. 2.16)

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) \times (b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}) =$$

$$= a_x\hat{i} \times (b_y\hat{j} + b_z\hat{k}) + a_y\hat{j} \times (b_x\hat{i} + b_z\hat{k}) + a_z\hat{k} \times (b_x\hat{i} + b_y\hat{j}) =$$

$$= a_x b_y \hat{i} \times \hat{j} + a_x b_z \hat{i} \times \hat{k} + a_y b_x \hat{j} \times \hat{i} + a_y b_z \hat{j} \times \hat{k} + a_z b_x \hat{k} \times \hat{i} + a_z b_y \hat{k} \times \hat{j} =$$

$$= a_x b_y \hat{k} - a_x b_z \hat{j} - a_y b_x \hat{k} + a_y b_z \hat{i} + a_z b_x \hat{j} - a_z b_y \hat{i} =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Verifichiamo che il prodotto vettoriale di due vettori è ortogonale ad entrambi i vettori:

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = a_x(\cancel{a_y b_z} - \cancel{a_z b_y}) + a_y(\cancel{a_z b_x} - \cancel{a_x b_z}) + a_z(\cancel{a_x b_y} - \cancel{a_y b_x}) = 0$$

Carattere vettoriale di una grandezza fisica

Perché una grandezza fisica sia un vettore, deve soddisfare le leggi di somma di vettori

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$$

e deve trasformarsi come un vettore per cambiamenti di riferimento

Quando consideriamo una grandezza fisica, dobbiamo quindi specificare quali sono le sue proprietà geometriche, ossia le sue proprietà di trasformazione (scalare, vettore, vettore assiale, ecc.)

Se vogliamo che le leggi fisiche non dipendano dal sistema di riferimento, devono essere espresse da relazioni geometricamente omogenee: p. es.

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + a\overrightarrow{w} \quad \text{ma non} \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} \cdot \vec{z}$$

in sistemi di riferimento diversi, infatti, i due membri devono cambiare nello stesso modo, e l'uguaglianza rimane valida: parliamo allora di covarianza della legge fisica.

Descrizione del movimento di un punto **(FMUV 3.4)**

La conoscenza dell'evoluzione della posizione in funzione del tempo può essere espressa attraverso le "leggi orarie":

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

$$z = z(t)$$

che possono esprimersi in un'unica relazione vettoriale:

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Le leggi orarie possono essere considerate come le rappresentazioni parametriche di una curva geometrica, la traiettoria.

Alternativamente, introducendo come parametro l'ascissa curvilinea s lungo la traiettoria, la descrizione del moto può essere data da:

$$\vec{r} = \vec{r}(s)$$

detta rappresentazione intrinseca della traiettoria.

$s = s(t)$ è l'espressione scalare della legge oraria, che sostituita in $\vec{r}(s)$ restituisce l'espressione vettoriale della legge oraria.

Velocità (FMUV 3.5-3.6, 3.8)

Verso una definizione operativa della velocità.

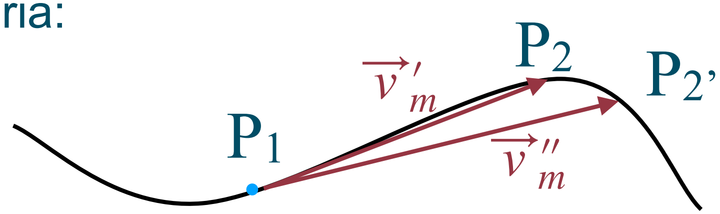
Nel linguaggio comune, si dice che ha velocità maggiore il punto materiale che, in uno stesso tempo, percorre una distanza maggiore.

Se teniamo conto che le posizioni di un punto sono quantità vettoriali, possiamo pensare di definire un vettore velocità come il rapporto tra lo spostamento, definito come $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ed il tempo impiegato a percorrerlo.

Conoscendo la legge oraria, possiamo definire la velocità media tra due tempi, o equivalentemente due posizioni:

$$\overrightarrow{v}_m = \overrightarrow{v}_m(t_2, t_1) = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

la velocità media è definita a partire da due tempi diversi, e non è dunque univoca per ogni punto della traiettoria:



facendo tendere $\Delta t = t_2 - t_1$ a zero, si può definire una velocità istantanea, funzione di un unico valore del tempo t:

$$\overrightarrow{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

velocità (2) (FMUV 3.7)

In termini di ascissa curvilinea $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt}$

Si noti che, passando al limite di spostamento infinitesimo, l'arco tende alla corda e la direzione di questa tende alla direzione della tangente,

per cui $|d\vec{r}| = ds$ e $\vec{v}$ è tangente alla traiettoria

e quindi possiamo scrivere alternativamente $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\hat{u}_t$

in cui $\hat{u}_t$ è il versore tangente alla traiettoria,

mentre $\frac{ds}{dt} = \dot{s}$ è il modulo (con segno) della velocità, o velocità scalare.

$\vec{v} = \dot{s}\hat{u}_t$ è detta rappresentazione intrinseca della velocità, in quanto è espressa in termini di proprietà geometriche della traiettoria (ascissa curvilinea e tangente)

Dimensioni della velocità: $[v] = [lt^{-1}]$, si misura in $\mathrm{m/s}$

Le precedenti relazioni possono essere invertite, permettendo di calcolare lo spostamento infinitesimo a partire dalla conoscenza della velocità istantanea:

$$d\vec{r} = \vec{v}dt; \quad ds = vdt$$

accelerazione (FMUV 3.9)

In maniera analoga si introduce la variazione della velocità, o vettore accelerazione:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\,\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

Dimensioni: $[a] = [lt^{-2}]$, l'accelerazione si misura in $\mathrm{m/s^2}$.

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$$

Ricordando l'espressione generale della derivata di un vettore:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\hat{u}_t) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + v\frac{d\hat{u}_t}{dt}$$

e quella della derivata di un versore

$$\frac{d\hat{u}_t}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{u}_t = \omega\hat{u}_n$$

l'accelerazione si può sempre scrivere come:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + v\omega\hat{u}_n$$

L'accelerazione si può quindi scomporre in una componente tangenziale ed una componente normale alla traiettoria

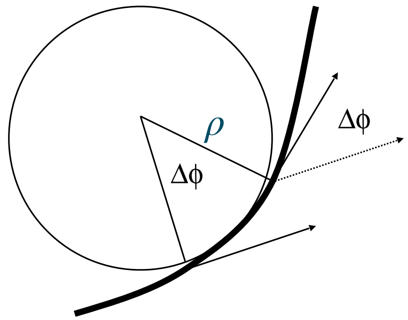
accelerazione 2 **(FMUV 3.10)**

Che cos'è ω?

Consideriamo il cerchio osculatore, ossia la circonferenza tangente alla traiettoria nel punto dato.

L'angolo di cui ruota il vettore velocità è uguale all'angolo di cui ruota il raggio del cerchio osculatore ρ, detto anche raggio di curvatura.

Approssimando la traiettoria col cerchio osculatore, si ha:



$$\rho d\varphi = ds$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + v\omega\hat{u}_n = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_n = \ddot{s}\hat{u}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{u}_n$$

detta rappresentazione intrinseca della accelerazione, data dalla somma dell'accelerazione tangenziale e di quella centripeta

cerchio osculatore **(FMUV 3.26)**

Dato un versore tangente ad una curva piana in un punto P, $\hat{u}_t$, il versore $\hat{u}_n$ è il versore normale ad $\hat{u}_t$ che giace sul piano della curva, orientato nella direzione della convessità della curva.

Se la curva non è piana, possiamo sempre individuare il piano individuato dal versore $\hat{u}_t$ in un punto P e dalla retta che congiunge P con un punto vicino P'. Il piano osculatore è il piano che si ottiene facendo tendere P' a P.

Se ci riferiamo di nuovo ad una curva piana, questa può essere rappresentata in coordinate cartesiane in un intorno di un suo punto P da una funzione $y = f(x)$.

Una circonferenza che passa per P può essere rappresentata anch'essa in un intorno di P da una funzione monodroma $y = g(x)$

Se cerchiamo una circonferenza che approssimi la curva data nel punto di coordinata x, dovrà essere:

$f(x) = g(x)$, perché entrambe le curve devono passare per $P(x,y)$;

$\dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{dg(x)}{dx}$, affinché le due curve condividano la stessa retta tangente;

$\dfrac{d^2f(x)}{dx^2} = \dfrac{d^2g(x)}{dx^2}$, affinché lo sviluppo in serie della curva e della circonferenza coincidano fino al secondo ordine in un intorno di P.

Ma in questo modo è definita univocamente una ed una sola circonferenza (tre equazioni per tre parametri), che rappresenta il cerchio osculatore.

Se la curva non è piana, possiamo ottenere $f(x)$ come proiezione della curva sul piano osculatore e identificare il cerchio osculatore come nel caso precedente.