Calcolo delle Probabilità
10-2-2021

Cognome:........................ Nome:...
Matricola.....................................

Esercizio 1

Un'urna contiene 2 palline rosse e 8 palline nere.

1. Si estraggono 8 palline CON reimmissione. Siano dati gli eventi $A =$ "nelle prime 4 estrazioni escono, in tutto, 2 palline rosse" e $B =$ "nelle ultime 4 estrazioni escono tutte palline rosse". Calcolare $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$.
2. Si estraggono 6 palline CON reimmissione. Sapendo che al massimo tre di loro sono rosse, calcolare la probabilità che esattamente una sia rossa.
3. Si estraggono, una alla volta, palline SENZA reimmissione. Sia T il numero dell'estrazione in cui esce la prima pallina nera. Trovare la distribuzione di T
4. Calcolare la distribuzione di T se si estraggono una alla volta, palline CON reimmissione

Esercizio 2

Sia data un'ellisse E di equazione canonica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

con $b < a$. Sia $\underline{X} = (X, Y)$ una v.a. uniformemente distribuita su E

1. trovare la densità di $\underline{X}$
2. trovare la marginali di $\underline{X}$ (ovvero le densità delle componenti X e Y)
3. calcolare $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}Y$, $\mathbb{E}X^2$ e $\mathbb{E}Y^2$
4. calcolare la probabilità che, gettando a caso un punto su E, questo cada nel cerchio C_b inscritto in E e di raggio b
5. sia Z una v.a che assume i valori 0 (se il punto gettato cade in C_b) e 1 (se il punto cade in $E \cap C_b^c$): calcolare la distribuzione di probabilità di Z
6. se si lancia il punto n volte, calcolare la probabilità che per k volte questo cada all'interno di C_b
7. sia Z_n la v.a. che indica il numero di volte che si colpisce C_b in n lanci, si studi il limite in probabilità, per $n \to \infty$, della successione

$$\frac{Z_n}{n}$$

SUGGERIMENTO: si ricorda la formula dell'area dell'ellisse $Area(E) = \pi ab$

Es. 1

A = "nelle prime 4 estr. solo 2 zone"
B = " " ultime " " Tutte zone"

1) $P(A) = \binom{4}{2} \frac{1}{5^2}\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{\cancel{4}^{2}\cdot 3}{\cancel{2}} \cdot \frac{16}{625} = \frac{96}{625} = 0,15$

$P(B) = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{625} = 0,0016$

$P(A \cap B) \underset{\uparrow}{=} P(A)\cdot P(B) = \frac{96}{625^2} = 0,00024$

poiché A e B sono indip.

2) $P(1 \text{ zone su } 6 \mid \max 3 \text{ zone}) = \frac{\overbrace{P(\max 3 \text{ zone} \mid 1 \text{ zone})}^{=1} \cdot P(1 \text{ zone})}{P(\max 3 \text{ zone})}$

$= \frac{P(1 \text{ zone})}{P(1 \text{ zone} \cup 2 \text{ zone} \cup 3 \text{ zone} \cup 0 \text{ zone})}$

$= \frac{\binom{6}{1}\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^5}{P(0 \text{ zone}) + P(1 \text{ zone}) + P(2 \text{ zone}) + P(3 \text{ zone})}$

$= \frac{\frac{6\cdot 4^5}{\cancel{5^6}}}{\left(\frac{4}{\cancel{5}}\right)^6 + \frac{6\cdot 4^5}{\cancel{5^6}} + \binom{6}{2}\frac{1}{\cancel{5^6}}\cdot 4^4 + \binom{6}{3}\frac{1}{\cancel{5^6}}\cdot 4^3}$

$= \frac{6144}{4096 + 6144 + 3840 + 1280} = \frac{6144}{15360} = 0,4$

3) senza reimmissione $\quad T =$ "estraz. con prima nera"

$$T \in \{1, 2, 3\} \quad \text{q.c.}$$

$$P(T=1) = P(N) = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

$$P(T=2) = P(RN) = \frac{1}{5} \cdot \frac{8}{9} = \frac{8}{45} = 0{,}17$$

$$P(T=3) = P(RRN) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9} \cdot 1 = \frac{1}{45} = 0{,}02$$

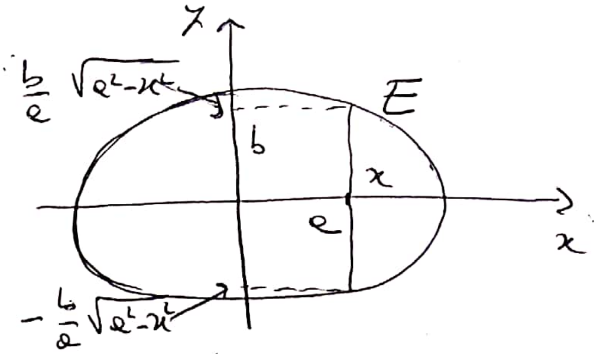
$$\left(\text{Infatti} \quad \frac{4}{5} + \frac{8}{45} + \frac{1}{45} = 1 \right)$$

4) con reimmissione $\quad T \in \{1, 2, \dots\}$ q.c.

e $T \sim \text{Geom}\left(\frac{4}{5}\right)$ quindi

$$P(T=j) = \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{j-1} \qquad j = 1, 2, \dots$$

<u>Es. 2</u>



$b < a$

1) $$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi a b} & (x,y) \in E \\ 0 & (x,y) \notin E \end{cases}$$

2) $$f_X(x) = \frac{1}{\pi a b} \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy = \frac{2\cancel{b}}{\pi a^2 \cancel{b}} \sqrt{a^2-x^2}$$

$$= \frac{2}{\pi a^2} \sqrt{a^2-x^2} \qquad |x| < a$$

$$f_Y(y) = \frac{2}{\pi b^2} \sqrt{b^2-y^2} \qquad |y| < b$$

3) $\mathbb{E}X = \int_{-a}^{a} x f(x)\,dx = \frac{2}{\pi a^2}\int_{-a}^{a} x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = 0$

$$\mathbb{E}X^2 = \frac{2}{\pi a^2}\int_{-a}^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{2^2}{\pi a^2}\int_{0}^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

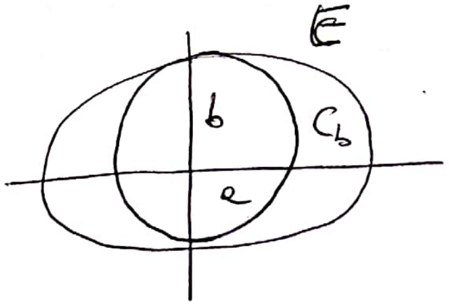
$x=\sqrt{y}\,a$
$$= \frac{2^{\cancel{2}}\,a}{\pi \cancel{a^2}\,2}\int_0^1 y\,\cancel{a^2}\cdot a\,\frac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{y}}\,dy$$

$$= \frac{2a^2}{\pi}\int_0^1 y^{\frac{1}{2}+1-1}(1-y)^{\frac{1}{2}+1-1}\,dy$$

$$= \frac{2a^2}{\pi}\,B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{\cancel{2}a^2}{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)^2}{\underbrace{\cancel{\Gamma(3)}}_{=2!}} = \frac{a^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^2}{\cancel{\pi}} = \frac{a^2}{4}$$

$\mathbb{E}Y = 0 \qquad \mathbb{E}Y^2 = \frac{b^2}{4}$

4) $P(\text{colpire } C_b) = \frac{\text{Area}(C_b)}{\text{Area}(E)} = \frac{\cancel{\pi} b^{\cancel{2}}}{\cancel{\pi} a \cancel{b}} = \frac{b}{a}$



5) $Z = \begin{cases} 1 & P(\text{colpire } C_b) = \frac{b}{a} \\ 0 & P(\text{colpire } E\cap C_b^c) = 1-\frac{b}{a} \end{cases}$

6) $Z_n \sim \text{Bin}\left(n, \frac{b}{a}\right)$

7) $\frac{Z_n}{n} \xrightarrow{P} P(Z=1) = \frac{b}{a}$