Meccanica Quantistica per CdS Matematica, Novembre 2018

Esercizio 1. Si consideri una particella di spin 1/2 vincolata a muoversi in due dimensioni e soggetta alla Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) + \frac{\omega}{4}(L_z + 2S_z).$$

a) Si calcolino le energie e le degenerazioni dello stato fondamentale e dei primi due stati eccitati.

b) Si considerino tutti gli stati che sono autostati di $\mathcal{H}$ e e che sono autostati di S_z con autovalore $\hbar/2$. Siano $|A\rangle$ e $|B\rangle$ i due stati tra essi che hanno energia minore. Si calcolino gli elementi di matrice $\langle A|x^2|A\rangle$ e $\langle B|x^2|B\rangle$

Esercizio 2. Si consideri un sistema a tre livelli. Gli stati $|1\rangle$, $|2\rangle$ e $|3\rangle$ costituiscono una base ortonormale.

a) Si calcolino gli autovettori della Hamiltoniana H sapendo che: (a) una misura di energia su $(|1\rangle + |2\rangle)/\sqrt{2}$ dà 0 con certezza; (b) una misura di energia su $(|1\rangle - |2\rangle)/\sqrt{2}$ dà $\hbar\omega$ con certezza.

b) Si calcolino gil autovalori della Hamiltoniana sapendo che $\langle A|H|A\rangle = \hbar\omega$, con $|A\rangle = (|1\rangle + |3\rangle)/\sqrt{2}$.

c) Si calcoli l'evoluto temporale $|A, t\rangle$ dello stato $|A\rangle$ e l'elemento di matrice $\langle A, t|H|A, t\rangle$.

d) Si calcoli la dispersione ΔE su $|A, t\rangle$.

Esame di Meccanica Quantistica, 29/01/2019

Esercizio 1. Si considerino due particelle identiche di spin 1/2 vincolate a muoversi in una dimensione e soggette, nel sistema del centro di massa, alla Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + 2m\omega^2 x^2 \left(1 + \frac{2\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2}{\hbar^2}\right)^2 ,$$

dove $x = x_1 - x_2$ è la distanza relativa, p il suo momento coniugato e m la massa ridotta

a) Si calcolino gli autovalori dell'Hamiltoniana, la relativa degenerazione e le corrispondenti funzioni d'onda.

b) All'istante $t = 0$ una misura dell'energia dà con certezza il valore $E = 9/2\,\hbar\omega$ e una misura della componente z dello spin totale $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$ dà con certezza 0. Inoltre, il valor medio del modulo quadro dello spin totale, S^2, è pari a $2/3\,\hbar^2$. Determinare lo stato più generale compatibile con queste condizioni.

c) Determinare univocamente lo stato in questione richiedendo che il valor medio dell'operatore $\hat{O} = (S_1)_z\, x_1 + (S_2)_z\, x_2$ sia il minimo possibile; x_1 e x_2 sono le coordinate delle due particelle nel sistema del centro di massa.

Esercizio 2. Un fascio di atomi di idrogeno passa attraverso un condensatore che produce un campo elettrico uniforme $\mathcal{E}$ lungo l'asse $\hat{\boldsymbol{z}}$. L'elettrone, di massa m e carica $-e$, è soggetto alla Hamiltoniana $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V$ dove

$$\mathcal{H}_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{\alpha}{r}$$

e V è l'energia potenziale associata al campo elettrico. Si tratti V come una perturbazione della Hamiltoniana $\mathcal{H}_0$ e non si consideri lo spin.

a) Se $|n = 2, lm\rangle$ sono le autofunzioni normalizzate di L^2, L_z ed $\mathcal{H}_0$ corrispondenti al livello eccitato $n = 2$, si calcolino tutti gli elementi di matrice della perturbazione $\langle 2l_1m_1|V|2l_2m_2\rangle$. Al primo ordine in $\mathcal{E}$, si calcolino le energie e la degenerazione dei livelli di $\mathcal{H}$ che corrispondono al livello imperturbato $n = 2$.

b) Al tempo $t = 0$, all'entrata del condensatore, l'elettrone è nello stato imperturbato $2s$, corrispondente al primo livello eccitato $n = 2$ di $\mathcal{H}_0$ con momento angolare nullo. Si calcoli l'autofunzione al tempo t assumendo che l'evoluzione avvenga unicamente nel sottospazio generato dagli stati del livello imperturbato $n = 2$.

c) Utilizzando il risultato del punto precedente, si calcoli la probabilità di misurare $L^2 = 2\hbar^2$, ossia che l'elettrone sia in uno stato $2p$, al tempo t.

Se $|2lm\rangle = R_{2l}(r)Y_l^m(\theta,\phi)$, l'integrale radiale

$$I_{\ell'\ell} = \int_0^\infty R_{2\ell'}(r)R_{2\ell}(r)\, r^3\, dr$$

vale

$$I_{00} = 6a \qquad I_{11} = 5a \qquad I_{01} = -3\sqrt{3}\, a$$

dove a è il raggio di Bohr.

Esercizio 1

(a)

Vale: $1+\frac{2}{\hbar^2}\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2 = 1+\frac{1}{\hbar^2}(S_{TOT}^2 - S_1^2 - S_2^2) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{\hbar^2}S_{TOT}^2$

Quindi $[H,\vec{S}_{TOT}]=0 \Rightarrow$ esiste una base di autovettori simultanei di $H, S_{TOT}^2, S_{TOT,z}$. Dato che lo spin totale può assumere i valori 0, 1 consideriamo due famiglie di stati

$$|A\rangle = \psi_a(\vec{x})\,|\underset{S_{TOT}}{1}\ S_z^{TOT}\rangle \qquad |B\rangle = \psi_b(\vec{x})\,|\underset{S_{TOT}}{0}\ \underset{S_{TOT,z}}{0}\rangle$$

$$H|A\rangle = \left[\frac{p^2}{2m}+2m\omega^2\left(-\frac{1}{2}+2\right)^2\right]|A\rangle$$

$$H|B\rangle = \left[\frac{p^2}{2m}+2m\omega^2\left(-\frac{1}{2}+0\right)^2\right]|B\rangle$$

Se

$$H_a = \frac{p^2}{2m}+\frac{9}{2}m\omega^2x^2 = \frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m(3\omega)^2x^2$$

$$H_b = \frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

segue che $\quad H_a\psi_a = E\psi_a \qquad H_b\psi_b = E\psi_b$

Quindi gli autovalori sono

stati con $S_{TOT}=1$ (stati $|A\rangle$): $E = 3\hbar\omega(n_a+\frac{1}{2})$

stati con $S_{TOT}=0$ (stati $|B\rangle$): $E = \hbar\omega(n_b+\frac{1}{2})$

Principio di Pauli:

Se $S_{TOT}=1$ dev'essere $\psi_a(x) = -\psi_a(-x)$ [DISPARI]

sono possibili solo stati con n_a dispari

Se $S_{TOT}=0$ dev'essere $\psi_b(x) = +\psi_b(-x)$ [PARI]

sono possibili solo stati con n_b pari

SPETTRO: [$n_a = 2m_a+1$ per avere solo n_a dispari]

$S_{TOT}=1 \qquad E = 3\hbar\omega\left(2m_a+1+\frac{1}{2}\right) \qquad m_a = 0,1,2,\ldots$

$S_{TOT}=0 \qquad E = \hbar\omega\left(2m_b+\frac{1}{2}\right) \qquad m_b = 0,1,2,\ldots$

[$n_b = 2m_b$ per avere solo n_b pari]

Stati più bassi

$E = \frac{\hbar\omega}{2} \quad (m_b = 0 \quad S_{TOT} = 0)$

$E = \frac{5\hbar\omega}{2} \quad (m_b = 1 \quad S_{TOT} = 0)$

$E = \frac{9}{2}\hbar\omega \begin{cases} m_b = 2 & S_{TOT} = 0 \\ m_a = 0 & S_{TOT} = 1 \end{cases}$ deg. 4 $\begin{pmatrix} 1 \text{ stato} & S_{TOT} = 0 \\ 3 \text{ stati} & S_{TOT} = 1 \end{pmatrix}$

b)

E' una combinazione degli stati $(m_b = 2 \quad S_{TOT} = 0)$ e $(m_a = 0 \quad S_{TOT} = 1 \quad S_{TOT,z} = 0)$

$$|\psi\rangle = \alpha\,|\underset{m_b}{2b}\,;\,\underset{S_{TOT}}{0}\;\underset{S_{TOT,z}}{0}\rangle + \beta\,|\underset{m_a}{0a}\,;\,\underset{S_{TOT}}{1}\;\underset{S_{TOT,z}}{0}\rangle \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

$$\langle\psi|S^2|\psi\rangle = |\alpha|^2 \cdot 0 + |\beta|^2 \cdot 2\hbar^2 = \frac{2}{3}\hbar^2 \Rightarrow \begin{cases} |\alpha| = \sqrt{\frac{2}{3}} \\ |\beta| = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|2b;00\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\alpha}\,|0a;10\rangle$$

c)

$$\hat{O} = S_{1z}x_1 + S_{2z}x_2 = \frac{1}{2}x\,(S_{1z} - S_{2z}) \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{x}{2} \\ x_2 = -\frac{x}{2} \end{cases}$$

dato che nel CM $x_1 + x_2 = 0$ e $x = x_1 - x_2$

$$(S_{1z} - S_{2z})\,|\underset{S_{TOT}}{0}\;\underset{S_{TOT,z}}{0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_{1z} - S_{2z})\left(|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle - |-\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle\right)$$
$$= \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\left(|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle + |-\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle\right) = \hbar\,|10\rangle$$

$$(S_{1z} - S_{2z})\,|1\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_{1z} - S_{2z})\left(|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle + |-\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle\right)$$
$$= \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\left(|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle - |-\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle\right) = \hbar\,|00\rangle$$

$$\hat{O}\psi = \frac{\hbar}{2}x\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,|2b;10\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\alpha}\,|0a;00\rangle\right)$$

$$\langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle = \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{\hbar}{2}\left[\langle 2b|x|0a\rangle e^{i\alpha} + \langle 0a|x|2b\rangle e^{-i\alpha}\right]$$ (3)

La fase dei valori medi non diagonali dipende dalle scelta delle fasi delle autofunzioni.

Scegliamo AUTOFUNZIONI <u>REALI</u> per l'oscillatore armonico unidimensionale, ossia per le autofunzioni di H_a e H_b. In particolare definiamo

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n|0\rangle$$

con

$$a^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{1}{\beta^2}\frac{d}{dx}\right)$$

$$|0\rangle = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\, e^{-\beta^2 x^2/2} \qquad \beta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

Con questa scelta gli elementi di matrice $\langle 0a|x|2b\rangle$ e $\langle 2b|x|0a\rangle$ sono reali e

$$\langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle = \frac{\sqrt{2}}{3}\hbar\,\langle 2b|x|0a\rangle\cos\alpha$$

Per calcolare il valore di α è quindi sufficiente calcolare il <u>SEGNO</u> di $\langle 2b|x|0a\rangle$

<u>NOTA</u>: Essendo interessati solo al segno, possiamo trascurare costanti moltiplicative POSITIVE. Qui e nel seguito, "costante" è una quantità reale positiva, che può cambiare ad ogni passaggio

$|0a\rangle$ corrisponde alla autofunzione $|1\rangle$ dell'oscillatore armonico con pulsazione 3ω

$$|0a\rangle = \text{costante}\; H_1\left(\sqrt{\frac{3m\omega}{\hbar}}\,x\right)\exp\left(-\frac{3m\omega x^2}{2\hbar^2}\right)$$

$$= \text{costante}\; x\,\exp\left(-3\beta^2 x^2/2\right)$$

$|2b\rangle$ corrisponde alla autofunzione $|4\rangle$ dello oscillatore armonico con pulsazione ω

Dal Testa - Patrí:

$$|3\rangle = \text{costante}\ (8\beta^3 x^3 - 12\beta x)\, e^{-\beta^2 x^2/2}$$

$$|4\rangle = \text{costante}\ a^+|3\rangle$$
$$= \text{costante}\left(x - \frac{1}{\beta^2}\frac{d}{dx}\right)\left[(8\beta^3 x^3 - 12\beta x)\, e^{-\beta^2 x^2/2}\right]$$
$$= \text{costante}\ (3 - 12\beta^2 x^2 + 4\beta^4 x^4)\, e^{-\beta^2 x^2/2}$$

Quindi

$$\langle 2b|x|0a\rangle = \text{costante}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-2\beta^2 x^2}\, x^2 (4\beta^4 x^2 - 12\beta^2 x^2 + 3)$$
$$= \text{costante}\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-y^2}(y^6 - 6y^4 + 3y^2) \qquad y = \sqrt{2}\beta x$$

Ora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-\alpha y^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, y^2 e^{-\alpha y^2} = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-\alpha y^2} = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) = \frac{\pi^{1/2}}{2\alpha^{3/2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, y^4 e^{-\alpha y^2} = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, y^2 e^{-\alpha y^2} = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\pi^{1/2}}{2\alpha^{3/2}}\right) = \frac{3}{4}\frac{\pi^{1/2}}{\alpha^{5/2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, y^6 e^{-\alpha y^2} = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, y^4 e^{-\alpha y^4} = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{3\pi^{1/2}}{4\alpha^{5/2}}\right) = \frac{15}{8}\frac{\pi^{1/2}}{\alpha^{7/2}}$$

Alternativamente [per chi conosce la Γ di Eulero]

$$[y^2 = x]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, y^{2n} e^{-y^2} = 2\int_0^{\infty} dy\, y^{2n} e^{-y^2} = \int_0^{\infty} dx\, x^{n-\frac{1}{2}} e^{-x} = \Gamma\left(n+\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \qquad \Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \Gamma\left(\tfrac{5}{2}\right) = \tfrac{3}{2}\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

$$\Gamma\left(\tfrac{7}{2}\right) = \tfrac{5}{2}\Gamma\left(\tfrac{5}{2}\right) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}$$

Quindi

$$\langle 2b|x|0a\rangle = \text{costante}\left(\frac{15}{8} - 6\cdot\frac{3}{4} + 3\cdot\frac{1}{2}\right) = \text{costante}\left(-\frac{9}{8}\right)$$

L'elemento di matrice è NEGATIVO

Il minimo si ottiene per $\cos\alpha = 1$, $\alpha = 0$

Esercizio 2

(a) $V = e\mathcal{E}z$. se $|2lm\rangle = R_{2l} Y_l^m$

$$\langle 2 l_1 m_1 | V | 2 l_2 m_2 \rangle$$
$$= e\mathcal{E}\int dr\, r^2 d\Omega\, (r\cos\theta)\, R_{2l_1}(r) Y_{l_1}^{m_1 *} R_{2l_2}(r) Y_{l_2}^{m_2}$$
$$= e\mathcal{E}\, I_{l_1 l_2} \int d\Omega\, Y_{l_1}^{m_1 *} \cos\theta\, Y_{l_2}^{m_2}$$

Ora $Y_l^m = f_{lm}(\theta) e^{im\phi}$

$$\int d\Omega\, Y_{l_1}^{m_1 *} \cos\theta\, Y_{l_2}^{m_2} = \int d\cos\theta\, f_{l_1 m_1} f_{l_2 m_2} \cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, e^{-i(m_1 - m_2)\phi}$$

L'integrale è zero se $m_1 \neq m_2$. Se $m_1 = m_2$ vale 2π.

Per $n=2$ l può assumere i valori $0, 1$. Quindi dobbiamo calcolare

$$\langle 1\pm1 | \cos\theta | 1\pm1 \rangle_\Omega = \int d\cos\theta\, \frac{3}{8\pi} \sin^2\theta \cos\theta\, 2\pi \qquad \cos\theta = x$$
$$= \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} dx\, x(1-x^2) = 0$$ per simmetria (cambia segno per $x \to -x$)

$$\langle 1\,0 | \cos\theta | 1\,0 \rangle_\Omega = \int d\cos\theta\, \frac{3}{4\pi} \cos^2\theta \cos\theta\, 2\pi \qquad \cos\theta = x$$
$$= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} dx\, x^3 = 0$$

$$\langle 0\,0 | \cos\theta | 0\,0 \rangle_\Omega = \int d\cos\theta\, \frac{1}{4\pi} \cos\theta\, 2\pi$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx\, x = 0$$

$$ {}_\Omega\langle 0\,0|\cos\theta|1\,0\rangle_\Omega = \int_{-1}^{1} d\cos\theta \, \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta\cos\theta \, 2\pi $$

$$ = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-1}^{1} dx\, x^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} $$

$$ {}_\Omega\langle 1\,0|\cos\theta|0\,0\rangle_\Omega = {}_\Omega\langle 0\,0|\cos\theta|1\,0\rangle_\Omega^* = \frac{\sqrt{3}}{3} $$

Gli elementi di matrice sono tutti nulli tranne

$$ \langle 2\,1\,0|V|2\,0\,0\rangle = \langle 2\,0\,0|V|2\,1\,0\rangle $$

$$ = e\mathcal{E} I_{10}\frac{\sqrt{3}}{3} = e\mathcal{E}(-3\sqrt{3}a)\frac{\sqrt{3}}{3} = -3ae\mathcal{E} $$

Per calcolare l'effetto della perturbazione, dobbiamo considerare la matrice della perturbazione nel sottospazio degenere $n=2$. Ordiniamo gli stati come:

$$ |2\,0\,0\rangle, |2\,1\,0\rangle, |2\,1\,-1\rangle, |2\,1\,1\rangle $$

La matrice di V diventa

$$ V = \begin{pmatrix} 0 & -3ae\mathcal{E} & 0 & 0 \\ -3ae\mathcal{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} $$

che ha autovalori $0, 0, \pm 3ae\mathcal{E}$. Se E_2 è l'energia dello stato imperturbato $n=2$ (4 volte degenere) l'introduzione di V genera 3 livelli:

$E_2 + 3ae\mathcal{E}$ non degenere; autof. $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\,0\,0\rangle - |2\,1\,0\rangle)$

E_2 degen. 2; $|\psi_2\rangle = |2\,1\,1\rangle$, $|\psi_3\rangle = |2\,1\,-1\rangle$

$E_2 - 3ae\mathcal{E}$ non degenere; autof. $|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\,0\,0\rangle + |2\,1\,0\rangle)$

[Per una discussione approfondita del problema si veda il Picasso, paragrafo 12.2]

NOTA: il Picasso adotta una diversa convenzione per le funzioni radiali per cui $I_{01} = +3\sqrt{3}a$

All'istante $t=0$ $\quad |\psi_0\rangle = |200\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \psi_4)$

Nel sottospazio $n=2$

$$e^{-iHt/\hbar}\psi_1 = \exp\left(-\frac{it}{\hbar}(E_2 + 3ae\mathcal{E})\right)\psi_1$$

$$e^{-iHt/\hbar}\psi_4 = \exp\left(-\frac{it}{\hbar}(E_2 - 3ae\mathcal{E})\right)\psi_4$$

Quindi

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\cancel{e^{-iE_2 t/\hbar}}}_{\text{eliminabile}} \left[e^{-\frac{it}{\hbar}(3ae\mathcal{E})}\psi_1 + e^{\frac{it}{\hbar}(3ae\mathcal{E})}\psi_4 \right]$$

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\omega t}\psi_1 + e^{i\omega t}\psi_4\right) \qquad \omega = \frac{3ae\mathcal{E}}{\hbar}$$

(c)

$$\psi(t) = \cos\omega t\,|200\rangle + i\sin\omega t\,|210\rangle$$

$$P(L^2 = 2\hbar^2) = \sin^2\omega t$$

Esame di Meccanica Quantistica, 15/02/2019

Esercizio 1. Si considerino due particelle identiche di spin 1 e massa m libere di muoversi in 3 dimensioni sotto l'azione della Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + m\omega^2(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)^2 + \frac{a}{\hbar}(J^2 + 2\hbar J_z)$$

con $a \ll \omega$, $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$, dove $\boldsymbol{L}$ è il momento angolare orbitale totale, $\boldsymbol{S}_1$ e $\boldsymbol{S}_2$ lo spin delle due particelle. Si risolva il problema nel sistema di riferimento del centro di massa delle due particelle.

a) Si determinino i livelli con energia inferiore a $6\hbar\omega$ e le relative degenerazioni.

b) Si determinino tutti gli stati $|\psi\rangle$ tali che: i) una misura di energia fornisce sempre un valore inferiore a $6\hbar\omega$; ii) una misura di S^2 e di J^2 fornisce con certezza $2\hbar^2$ per entrambi gli operatori; (iii) una misura di J_z fornisce $\hbar$ con probabilità $2/3$ e $-\hbar$ con probabilità $1/3$. Per tutti questi stati si calcolino i valori che si possono ottenere in una misura di L_z e le rispettive probabilità.

c) Per tutti gli stati $|\psi\rangle$ calcolati in b), sia $|\psi(t)\rangle$ l'evoluto al tempo t. Si calcoli $\langle\psi(t)|xy|\psi(t)\rangle$, dove x ed y sono le componenti della posizione relativa $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$.

Esercizio 2. Si consideri una particella di spin 1. Il suo spin e' soggetto alla Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{\omega}{\hbar}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n})^2,$$

dove $\boldsymbol{n} = (\cos\phi, \sin\phi, 0)$.

a) Si consideri la base $\{|+1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle\}$ formata dagli autovettori di S_z con autovalori $+\hbar, 0, -\hbar$. In tale base si scriva la rappresentazione matriciale di S_x, S_y e $\mathcal{H}$.

b) Si determinino gli autovettori ed autovalori di $\mathcal{H}$ e S_x.

c) All'istante $t = 0$ il sistema si trova nell'autostato di S_x con autovalore 0; si determini lo stato $|\psi(t)\rangle$ al tempo t generico.

d) Si calcoli il valor medio di $O = \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}$, $\langle\psi(t)|O|\psi(t)\rangle$, al variare di t; se in un misura di O al tempo t^* si ottiene $\hbar$, quale valore si ottiene al tempo $t' > t^*$?

Esercizio 1

a)

Se introduciamo $\bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$, $\bar{p}$ il momento coniugato corrispondente e la massa ridotta $\mu = m/2$ otteniamo

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + m\omega^2 r^2 + \frac{a}{\hbar}(J^2 + 2\hbar J_z)$$

$$= \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu(2\omega)^2 r^2 + \frac{a}{\hbar}(J^2 + 2\hbar J_z)$$

Se $a=0$ lo spettro è dato da

$$E = \hbar(2\omega)\left(n + \frac{3}{2}\right) = \hbar\omega(2n+3)$$

Pauli

$n=2$ $\overline{\ell = 2, 0}$ $7\hbar\omega$, pari per $r \to -r$ x stati spin 2, 0

$n=1$ $\overline{\ell = 1}$ $5\hbar\omega$, dispari per $r \to -r$ x stati spin 1

$n=0$ $\overline{\ell = 0}$ $3\hbar\omega$, pari per $r \to -r$ x stati spin 2, 0

Quindi, nella base $|L, L_z, S, S_z\rangle$ abbiamo per $a=0$

$E = 7\hbar\omega \longrightarrow |2\ m\ 2\ S_z\rangle, |2\ m\ 0\ 0\rangle, |0\ 0, 2\ S_z\rangle, |0\ 0\ 0\ 0\rangle$

(al di sopra di $6\hbar\omega$)

$E = 5\hbar\omega \longrightarrow |1\ m\ 1\ S_z\rangle$

$E = 3\hbar\omega \longrightarrow |0\ 0\ 2\ S_z\rangle, |0\ 0\ 0\ 0\rangle$

Introduciamo ora il termine proporzionale ad a

lo Stato con $E = 3\hbar\omega$ ha $\ell = 0 \longrightarrow J = \bar{L} + \bar{S} = \begin{cases} 0 & \text{se } S=0 \\ 2 & \text{se } S=2 \end{cases}$

Nella base $|n L S J, J_z\rangle$ diventa

$E = 3\hbar\omega \quad |0\,0\,0\,0\,0\rangle$

$E = 3\hbar\omega + 2\hbar a \quad |0\,0\,2\,2\,-2\rangle$

$E = 3\hbar\omega + 4\hbar a \quad |0\,0\,2\,2\,-1\rangle$

$E = 3\hbar\omega + 6\hbar a \quad |0 0 2 2 0\rangle$

$E = 3\hbar\omega + 8\hbar a \quad |0 0 2 2 1\rangle$

$E = 3\hbar\omega + 10\hbar a \quad |0 0 2 2 2\rangle$

b) Lo stato con $E = 5\hbar\omega$ $(n=1)$ ha $L=1$ e $S=1$

$J = L + S = \begin{cases} 2 \\ 1 \\ 0 \end{cases}$

Quindi

$$E = 5\hbar\omega \quad \begin{array}{c} \quad\; n\ \ell\ s\ J\ J_z \\ \left\{ \begin{array}{l} |1\,1\,1\,0\,0\rangle \\ |1\,1\,1\,1\,-1\rangle \end{array} \right. \end{array} \quad \text{degenerazione } 2$$

$$E = 5\hbar\omega + 2\hbar a \left\{ \begin{array}{l} |1\,1\,1\,1\,0\rangle \\ |1\,1\,1\,2\,-2\rangle \end{array} \right. \quad \text{deg. } 2$$

$$E = 5\hbar\omega + 4\hbar a \left\{ \begin{array}{l} |1\,1\,1\,1\,1\rangle \\ |1\,1\,1\,2\,-1\rangle \end{array} \right. \quad \text{deg. } 2$$

$E = 5\hbar\omega + 6\hbar a \quad |1\,1\,1\,2\,0\rangle$ deg. 1

$E = 5\hbar\omega + 8\hbar a \quad |1\,1\,1\,2\,1\rangle$ deg. 1

$E = 5\hbar\omega + 10\hbar a \quad |1\,1\,1\,2\,2\rangle$ deg. 1

b) Dovendo essere $S^2 = 2\hbar^2$ e $E \leq 6\hbar\omega$, si tratta di uno stato con $n=1$. Quindi

$$\psi = a\,\overset{n\ \ell\ s\ J\ J_z}{|1\,1\,1\,1\,-1\rangle} + b\,\overset{n\ \ell\ s\ J\ J_z}{|1\,1\,1\,1\,1\rangle}$$

con $|a|^2 = \frac{1}{3}$ e $|b|^2 = \frac{2}{3}$

Dato che $n=1$, $l=1$, $s=1$ sempre, semplifichiamo la notazione scrivendo (3)

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\alpha} |1 \; -1\rangle_{J \; J_z} + \sqrt{\frac{2}{3}} |1 \; 1\rangle_{J \; J_z}$$

Nella base $|l_z \; s_z\rangle_{LS}$ abbiamo

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\alpha} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} |0 \; -1\rangle_{LS} - \sqrt{\frac{1}{2}} |-1 \; 0\rangle_{LS} \right)$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} |1 \; 0\rangle_{LS} - \sqrt{\frac{1}{2}} |0 \; 1\rangle_{LS} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} |1 \; 0\rangle_{LS} - \frac{1}{\sqrt{3}} |0 \; 1\rangle_{LS} + \frac{1}{\sqrt{6}} e^{i\alpha} |0 \; -1\rangle_{LS} - \frac{1}{\sqrt{6}} e^{i\alpha} |-1 \; 0\rangle_{LS}$$

Quindi

$\text{Prob}(L_z = \hbar) = \frac{1}{3}$

$\text{Prob}(L_z = 0) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

$\text{Prob}(L_z = -\hbar) = \frac{1}{6}$

(c)

E di $|1 \; -1\rangle \longrightarrow 5\hbar\omega$

E di $|1 \; 1\rangle \longrightarrow 5\hbar\omega + 4\hbar a$

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\alpha} e^{i(-5\omega t)} |1 \; -1\rangle$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{3}} e^{i(-5\omega t - 4at)} |1 \; 1\rangle \longrightarrow \text{eliminando fase}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i(\alpha + 4at)} |1 \; -1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |1 \; 1\rangle$$

Definiamo $\beta(t) = 4at + \alpha$

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\beta} |1 \; -1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |1 \; 1\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} |1 \; 0\rangle_{LS} - \frac{1}{\sqrt{3}} |0 \; 1\rangle_{LS} + \frac{1}{\sqrt{6}} e^{i\beta} |0 \; -1\rangle_{LS} - \frac{1}{\sqrt{6}} e^{i\beta} |-1 \; 0\rangle_{LS}$$

$\langle \psi(t) | xy | \psi(t) \rangle$

$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\, {}_{LS}\langle 0\, 1|\right) xy \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}|0\, 1\rangle\right)$ ← termini $S_z = 1$

$+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\, {}_{LS}\langle 1 0| - \frac{1}{\sqrt{6}} e^{-i\beta}\, {}_{LS}\langle -1 0|\right) xy \left(\frac{1}{\sqrt{3}}|1 0\rangle_{LS} - \frac{1}{\sqrt{6}} e^{i\beta}|-1 0\rangle_{LS}\right)$ $S_z = 0$

$+\left(\frac{1}{\sqrt{6}} e^{-i\beta}\, {}_{LS}\langle 0\, -1|\right) xy \left(\frac{1}{\sqrt{6}} e^{i\beta}|0\, -1\rangle_{LS}\right)$ $S_z = -1$

Possiamo ora effettuare il prodotto scalare sullo spin. Rimaniamo quindi con stati $|m\rangle_L$ (propriamente $|n=1\ \ell=1\ m\rangle$)

$$= \frac{1}{3}\, {}_L\langle 0|xy|0\rangle_L + \frac{1}{3}\, {}_L\langle 1|xy|1\rangle_L + \frac{1}{6}\, {}_L\langle -1|xy|-1\rangle_L + \frac{1}{6}\, {}_L\langle 0|xy|0\rangle_L$$
$$- \frac{1}{3\sqrt{2}} e^{-i\beta}\, {}_L\langle -1|xy|1\rangle_L - \frac{1}{3\sqrt{2}} e^{i\beta}\, {}_L\langle 1|xy|-1\rangle_L$$

Per calcolare gli elementi di matrice passiamo alla base cartesiana $|n_x\, n_y\, n_z\rangle$. Per effettuare la corrispondenza corretta è necessario definire le autofunzioni 1D

$$\psi_0 = A e^{-\beta x^2} \qquad \beta = \frac{m\Omega}{2\hbar}, \ \Omega \text{ pulsazione}$$
$$\psi_1 = B x e^{-\beta x^2}$$

Per definizione $|m\rangle_L = |n=1\ \ell=1\ m\rangle = R_{n\ell}(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi)$

$$|1\,1\,1\rangle_L = R_{11}\left(-\frac{c}{\sqrt{2}}\right)\sin\theta\, e^{i\phi} \qquad c = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}$$
$$= -\frac{c}{\sqrt{2}} R_{11} \frac{1}{r}(x+iy)$$

$$|1\,1\,0\rangle_L = R_{11}\, c\cos\theta = c R_{11} \frac{1}{r} z$$

$$|1\,1\,-1\rangle_L = R_{11}\left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right)\sin\theta\, e^{-i\phi}$$
$$= \frac{c}{\sqrt{2}} R_{11} \frac{1}{r}(x-iy)$$

Consideriamo ora la funzione normalizzata

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overset{n_x n_y n_z}{|1\,0\,0\rangle} + i\overset{n_x n_y n_z}{|0\,1\,0\rangle}\right) = \frac{A^2 B}{\sqrt{2}}(x+iy)\, e^{-\beta r^2}$$

Se poniamo

$$-\frac{c}{\sqrt{2}}\frac{R_{11}}{r} = \frac{A^2 B}{\sqrt{2}} e^{-\beta r^2} \qquad \boxed{R_{11} = -\frac{A^2 B}{c} r e^{-\beta r^2}} \quad (*)$$

possiamo identificare

$$|1\,1\,1\rangle_L = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\,0\,0\rangle + i\,|0\,1\,0\rangle\right)$$

L'identificazione $(*)$ implica

$$|1\,1\,0\rangle_L = c\left(-\frac{A^2 B}{c} r e^{-\beta r^2}\right)\frac{z}{r} =$$

$$= -A^2 B\, z\, e^{-\beta r^2} = -\underset{n_x\,n_y\,n_z}{|0\,0\,1\rangle}$$

$$|1\,1\,-1\rangle_L = \frac{c}{\sqrt{2}}\left(-\frac{A^2 B}{c} r e^{-\beta r^2}\right)\frac{1}{r}(x - iy)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} A^2 B\,(x - iy)\, e^{-\beta r^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\,0\,0\rangle - i\,|0\,1\,0\rangle\right)$$

NOTA IMPORTANTE:
Per la correttezza del calcolo, è essenziale che le fasi relative delle 3 autofunzioni siano quelle indicate. Per esempio, non è corretto utilizzare

$$|1\,1\,1\rangle_L = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\,0\,0\rangle + i\,|0\,1\,0\rangle\right)$$

$$|1\,1\,-1\rangle_L = +\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\,0\,0\rangle - i\,|0\,1\,0\rangle\right)$$

Infatti, i Clebsch-Gordan utilizzati nel passaggio dalla base $|j\,j_z\rangle \longrightarrow |m\,S_z\rangle$ sono calcolati assumendo che gli elementi di matrice di L_+ siano positivi. E' quindi necessario che le fasi relative soddisfino

$$_L\langle 1\,1\,m|L_+|1\,1\,m-1\rangle_L > 0 \qquad m = 0, 1$$

La scelta fatta soddisfa questo criterio. Ovviamente la condizione rimane valida se $|1\,1\,1\rangle_L$, $|1\,1\,0\rangle_L$ e $|1\,1\,-1\rangle_L$ sono moltiplicate tutte e tre per la STESSA fase (per esempio per (-1)).

Per proseguire il calcolo ricordiamo che che per un oscillatore 1D $\langle E|x|E\rangle = 0$. Quindi

$$ {}_L\langle 1|xy|1\rangle_L = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\langle 100|xy|100\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle 010|xy|010\rangle}_{=0} + i\langle 100|xy|010\rangle - i\langle 010|xy|100\rangle\Big) $$

$$ = \frac{i}{2}\Big(\langle 1|x|0\rangle\langle 0|y|1\rangle - \langle 0|x|1\rangle\langle 1|y|0\rangle\Big) = 0 $$

Allo stesso modo

$$ {}_L\langle -1|xy|-1\rangle_L = 0 $$

Infine

$$ {}_L\langle 0|xy|0\rangle_L = \langle 001|xy|001\rangle = 0 $$

La cancellazione degli elementi diagonali poteva essere verificata direttamente in coordinate sferiche!

Infatti

$$ xy = r^2\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi = \frac{1}{4i}r^2\sin^2\theta\left(e^{2i\phi} - e^{-2i\phi}\right) $$

Da questo segue che

$$ \langle l_1 m_1|xy|l_2 m_2\rangle = 0 \qquad \text{se} \quad |m_1 - m_2| \neq 2 $$

Infatti se $|m_1 - m_2| \neq 2$

$$ \int d\cos\theta\, g_{l_1m_1}(\theta)\, g_{l_2m_2}(\theta) \underbrace{\int d\varphi\, e^{-im_1\phi}\, e^{im_2\phi}\, e^{\pm 2i\phi}}_{\text{questo è uguale a zero se } |m_1-m_2|\neq 2} h(\theta) = 0 $$

In conclusione rimaniamo con

$$ \langle\psi(t)|xy|\psi(t)\rangle = -\frac{1}{3\sqrt{2}}\left(e^{-i\beta}\,{}_L\langle -1|xy|1\rangle + \text{complesso coniugato}\right) $$

Ora

$$ {}_L\langle -1|xy|1\rangle_L = -\frac{1}{2}\Big(\langle 100| + i\langle 010|\Big)xy\Big(|100\rangle + i|010\rangle\Big) $$

$$ = -i\,\big|\langle 0|x|1\rangle\big|^2 $$

In 1D $|\langle 0|x|1\rangle|^2 = \frac{\hbar}{2m\Omega}$ (Ω pulsazione)

Quindi

$$\langle\psi(t)|xy|\psi(t)\rangle = -\frac{1}{3\sqrt{2}}\left[-e^{-i\beta}i|\langle 0|x|1\rangle|^2 + ie^{i\beta}|\langle 0|x|1\rangle|^2\right]$$

$$= \frac{\hbar}{6\sqrt{2}m\omega}\sin\beta$$

Esercizio 2

a)

Dato che $\langle 1|S_+|0\rangle = \langle 0|S_+|-1\rangle = \sqrt{2}\hbar$ sono gli unici elementi di matrice non nulli

$$S_+ = \hbar\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_- = S_+^+ = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{S}\cdot\bar{n} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\phi} & 0 \\ e^{i\phi} & 0 & e^{-i\phi} \\ 0 & e^{i\phi} & 0 \end{pmatrix} \qquad H = \frac{\omega}{\hbar}(\bar{S}\cdot n)\cdot(S\cdot n) = \frac{\hbar\omega}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & e^{-2i\phi} \\ 0 & 2 & 0 \\ e^{2i\phi} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

Gli autovalori di ogni componente dello spin sono $\pm\hbar, 0$.

Autovettori di S_x:

$w_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $\qquad S_x = +\hbar$

$w_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\qquad S_x = 0$

$w_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $\qquad S_x = -\hbar$

Dato che $\vec{S}\cdot\hat{n}$ è una componente di $\vec{S}$ lungo $\hat{n}$, allora i suoi autovalori sono $\pm\hbar, 0$. Gli autovalori di $(S\cdot\hat{n})^2$ sono $\hbar^2$ (2 volte), 0. Quindi gli autovalori di H sono $\hbar\omega$ (2 volte), 0. (8)

Autovettori

$$v_1 = \left(\frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\phi}\right) \qquad E = \hbar\omega$$

$$v_2 = (0, 1, 0) \qquad E = \hbar\omega$$

$$v_3 = \left(\frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\phi}\right) \qquad E = 0$$

NOTA (ovvia): v_1 e v_2 sono una base ortonormale nel sottospazio con $E=\hbar\omega$; ogni loro combinazione di v_1 e v_2 è ancora un autovettore di H. Per il seguito dell'esercizio si può usare una qualsiasi base nel sottospazio con $E=\hbar\omega$. È però importante che v_1 e v_2 siano una base <u>ORTONORMALE</u>

c)

$$\psi_0 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = a v_1 + b v_2 + c v_3$$

$$a = \langle v_1 | \psi_0 \rangle = i \sin\varphi$$
$$b = \langle v_2 | \psi_0 \rangle = 0 \qquad \rightarrow \qquad \psi_0 = i\sin\varphi\, v_1 - \cos\varphi\, v_3$$
$$c = \langle v_3 | \psi_0 \rangle = -\cos\varphi$$

$$\psi(t) = i \sin\varphi\, e^{-i\omega t} v_1 - \cos\varphi\, v_3$$

d) Dato che $[S\cdot\hat{n}, H] = 0$, l'elemento di matrice non dipende da t

$$\langle \psi(t) | S\cdot n | \psi(t) \rangle = \langle \psi_0 | S\cdot n | \psi_0 \rangle$$

$$(\bar{S}\cdot\bar{n})\psi_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\phi} & 0 \\ e^{i\phi} & 0 & e^{-i\phi} \\ 0 & e^{i\phi} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \hbar\begin{pmatrix} 0 \\ -i\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle\psi_0|\bar{S}\cdot\bar{n}|\psi_0\rangle = 0$$

Dato che $[\bar{S}\cdot\hat{n}, H] = 0$, se il sistema è in un autostato di $\bar{S}\cdot\hat{n}$ al tempo t^*, è sempre nello stesso autostato per ogni $t' > t^*$. Quindi si ottiene sempre $\hbar$.

Esame di Meccanica Quantistica, 20/05/2019

Esercizio 1. Si considerino due particelle distinguibili di spin 1/2 e la famiglia di stati (consideriamo solo la parte di spin)

$$|\psi_0\rangle = a|-1/2, 1/2\rangle + b|1/2, -1/2\rangle,$$

dove il ket $|s_{1z}, s_{2z}\rangle$ indica un autostato di S_{1z} e S_{2z} rispettivamente con autovalori $\hbar s_{1z}$ e $\hbar s_{2z}$.

a) Si determinino tutti gli stati della forma $|\psi_0\rangle$ tali che: i) la probabilità di misurare $S_{2z} = \hbar/2$ è 1/3; ii) la probabilità di misurare $S^2_{\text{tot}} = 2\hbar^2$ è 1/2, dove $\boldsymbol{S}_{\text{tot}} = \boldsymbol{S}_1 + \mathbf{S}_2$. Si dica quanti sono gli stati fisicamente distinti che soddisfano le due condizioni e, per ciascuno, si calcoli la funzione d'onda di spin normalizzata.

b) Le due particelle interagiscono secondo l'Hamiltoniana

$$H = \frac{\omega}{\hbar} \boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2.$$

Supponendo che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi in uno degli stati determinati al punto a), si calcoli $|\psi(t)\rangle$ al tempo t. Se viene effettuata una misura al tempo $t = \pi/\omega$ di S_{1z}, quali valori possono essere ottenuti e con quale probabilità? E quanto vale per questo valore di t l'elemento di matrice $\langle\psi(t)|S_{1z}|\psi(t)\rangle$? Si riportino i risultati per tutti gli stati fisicamente distinti calcolati al punto a).

c) Al tempo $t = \pi/\omega$ viene effettuata una misura di S^2_{tot} ottenendo $2\hbar^2$. Quindi il sistema viene fatto evolvere fino al tempo $t' = \pi/\omega + \delta$ ($\delta > 0$), sempre secondo l'Hamiltoniana H. Al tempo t' viene effettuata una misura di S_{1x}. Quali valori possono essere ottenuti e con quale probabilità? Si riportino i risultati per tutti gli stati fisicamente distinti calcolati al punto a).

Esercizio 2. All'istante $t = 0$ la funzione d'onda normalizzata $\psi(x, t = 0)$ di un oscillatore armonico quantistico unidimensionale di massa m e pulsazione ω è

$$\psi(x, 0) = \langle x|\psi\rangle_{t=0} = N \frac{m\omega}{2\hbar} x^2 \, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \, .$$

a) Si determini la costante di normalizzazione N.

b) Si determini la funzione d'onda $\psi(x, t)$ al tempo t.

c) Al tempo t si determinino: il valor medio dell'operatore di parità Π (${}_t\langle\psi|\Pi|\psi\rangle_t$); il valor medio dell'impulso $\hat{p}$; il valor medio della Hamiltoniana; il valor medio dell'operatore $\hat{O} = \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}$.

d) Si determini il prodotto $\Delta x(t)^2 \, \Delta p(t)^2$, dove $\Delta x(t)$ e $\Delta p(t)$ sono le indeterminazioni della coordinata e dell'impulso relativi allo stato di funzione d'onda $\psi(x, t)$.

Esercizio ①

a) $\psi_0 = a\left|-\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle + b\left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle$

Per normalizzazione $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Scegliendo le fasi possiamo richiedere che a sia reale positivo.

i) $|a|^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad |b| = \sqrt{\frac{2}{3}} \qquad b = \sqrt{\frac{2}{3}}\,e^{i\phi}$

Quindi $\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|-\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,e^{i\phi}\left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle$

ii) Cambio delle base. Passiamo a $|S_{tot}, S_{tot,z}\rangle_{tot}$

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1\,0\rangle_{tot} - |0\,0\rangle_{tot}\right] + \sqrt{\frac{2}{3}}\,e^{i\phi}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1\,0\rangle_{tot} + |0\,0\rangle_{tot}\right]$$

$$\text{Prob}(S_{tot}^2 = 2\hbar^2) = \left|\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\phi}\right|^2 = \frac{1}{6}\left|1+\sqrt{2}e^{i\phi}\right|^2$$

$$= \frac{1}{6}\left(1+\sqrt{2}e^{i\phi}\right)\left(1+\sqrt{2}e^{-i\phi}\right) = \frac{1}{6}\left(3+2\sqrt{2}\cos\phi\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}\cos\phi \Longrightarrow \text{Quindi } \cos\phi = 0$$

Due stati fisici con $\phi = \pi$ e $\phi = -\pi$ rispettivamente

$$(\psi_0)_{1\,stato} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|-\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle + i\sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$(\psi_0)_{2\,stato} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|-\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle - i\sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle$$

Nella base $|S_{tot}, S_{tot,z}\rangle$ abbiamo

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1\pm\sqrt{2}i)|1\,0\rangle_{tot} - \frac{1}{\sqrt{6}}(1\mp\sqrt{2}i)|0\,0\rangle_{tot}$$

(b) $H = \frac{\omega}{\hbar}\bar{S}_1\cdot\bar{S}_2 = \frac{\omega}{2\hbar}\left(S_{tot}^2 - S_1^2 - S_2^2\right) = \frac{\omega}{2\hbar}S_{tot}^2 - \frac{3}{4}\hbar\omega$

Eliminando una fase

$$\psi_0(t)_{1\,stato} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1+\sqrt{2}i)e^{-i\omega t}|1\,0\rangle_{tot} - \frac{1}{\sqrt{6}}(1-\sqrt{2}i)|0\,0\rangle_{tot}$$

$$\psi_0(t)_{2\,stato} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1-\sqrt{2}i)e^{-i\omega t}|1\,0\rangle_{tot} - \frac{1}{\sqrt{6}}(1+\sqrt{2}i)|0\,0\rangle_{tot}$$

Al tempo $t = \pi/\omega$ $\left[e^{-i\omega t} = e^{-i\pi} = -1\right]$ ②

$$\psi_0(t)_{1S} = -\frac{1}{\sqrt{6}}(1+\sqrt{2}i)|1\,0\rangle_{tot} - \frac{1}{\sqrt{6}}(1-\sqrt{2}i)|0\,0\rangle_{tot}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{6}}(1+\sqrt{2}i)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right\rangle + \left|-\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\right\rangle\right)$$

$$- \frac{1}{\sqrt{6}}(1-\sqrt{2}i)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right\rangle - \left|-\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\right\rangle\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\,i\left|-\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

$$\psi_0(t)_{2S} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,i\left|-\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

Per entrambi gli stati

$$\text{Prob}\left(S_{1z} = \frac{\hbar}{2}\right) = \frac{1}{3} \qquad \text{Prob}\left(S_{1z} = -\frac{\hbar}{2}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\langle\psi_0(t)|S_{1z}|\psi_0(t)\rangle = \frac{\hbar}{2}\text{Prob}\left(S_{1z} = \frac{\hbar}{2}\right) - \frac{\hbar}{2}\text{Prob}\left(S_{1z} = -\frac{\hbar}{2}\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2}\cdot\frac{1}{3} - \frac{\hbar}{2}\frac{2}{3} = -\frac{\hbar}{6}$$

c)

Dopo la misura $\psi_{dopo} = |1\,0\rangle_{tot}$ (per entrambi gli stati)

A parte una fase $\psi_{dopo}(t') = \psi_{dopo}(t) = |1\,0\rangle_{tot}$ dato che ψ_{dopo} è autostato di H. Quindi

$$\psi(t') = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle_{1z}\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{2z} + \left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{1z}\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle_{2z}\right)$$

Esprimiamo $|S_z\rangle_{1z}$ in termini degli autostati $|S_x\rangle_{1x}$ di S_{1x}

$$\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle_{1z} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle_{1x} + \left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{1x}\right)$$

$$\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{1z} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle_{1x} - \left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{1x}\right)$$

$$\psi(t') = \frac{1}{2}\left(\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle_{1x} + \left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{1x}\right)\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{2z}$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle_{1x} - \left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{1x}\right)\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle_{2z}$$
$$= \left|\tfrac{1}{2}\right\rangle_{1x}\left[\frac{1}{2}\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle_{1z} + \frac{1}{2}\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{z}\right]$$
$$+ \left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{1x}\left[-\frac{1}{2}\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle_{1z} + \frac{1}{2}\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{z}\right]$$

$$\text{Prob}\left(S_{1x} = \frac{\hbar}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Prob}\left(S_{1x} = -\frac{\hbar}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 2

a) La normalizzazione poteva essere calcolata in due modi

i) Metodo diretto

$$1 = \langle\psi|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |\psi(x)|^2 = \frac{|N|^2}{4}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x^4 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}$$
$$= \frac{|N|^2}{4}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, \xi^4 e^{-\xi^2} \qquad \xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x$$
$$= \frac{|N|^2}{4}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2} \frac{3}{4}\sqrt{\pi} = \frac{3|N|^2}{16}\left(\frac{\hbar\pi}{m\omega}\right)^{1/2}$$

Quindi (prendiamo N reale positivo) $N = \frac{4}{\sqrt{3}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$

L'integrale gaussiano si può fare riducendolo a integrale Γ oppure con il trucco

$$\int dx\, x^2 e^{-\alpha x^2} = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\int dx\, e^{-\alpha x^2} = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^{3/2}}$$

$$\int dx\, x^4 e^{-\alpha x^2} = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\int dx\, x^2 e^{-\alpha x^2} = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^{3/2}}\right) = \frac{3}{4}\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{5/2}}$$

ii) Metodo indiretto (più utile dato che fornisce la decomposizione di ψ in autofunzioni, necessaria per risolvere i punti successivi)

Le autofunzioni di H sono

$$\psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\xi^2/2} \quad \text{stat fond } (n=0)$$

$$\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x$$

$$\psi_2 = \sqrt{2}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\left(\xi^2 - \frac{1}{2}\right)e^{-\xi^2/2} \quad \text{II ecc. } (n=2)$$

Quindi

$$\psi = \frac{N}{2}\xi^2 e^{-\xi^2/2} = \frac{N}{2}\left[\left(\xi^2-\frac{1}{2}\right)e^{-\xi^2/2} + \frac{1}{2}e^{-\xi^2/2}\right]$$

$$= \frac{N}{2}\left(\frac{\pi\hbar}{m\omega}\right)^{1/4}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2(x) + \frac{1}{2}\psi_0(x)\right]$$

Quindi

$$1 = \langle\psi|\psi\rangle = \frac{|N|^2}{4}\left(\frac{\pi\hbar}{m\omega}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}|N|^2\left(\frac{\pi\hbar}{m\omega}\right)^{1/2}$$

ovviamente identica alla precedente.

Sostituendo il valore di N otteniamo

$$\psi = \sqrt{\frac{2}{3}}\psi_2(x) + \frac{1}{\sqrt{3}}\psi_0(x) = \sqrt{\frac{2}{3}}|2\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|0\rangle$$

I ket sono definiti in modo preciso a pag. 5

b) Eliminando una fase

$$\psi(t) = \sqrt{\frac{2}{3}}e^{-2i\omega t}|2\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|0\rangle$$

[Nota funzione pari sotto $x \to -x$ per ogni t]

c) i) parità. $\psi(x)$ è pari: $\Pi\psi(x) = \psi(x)$

$$\langle\psi|\hat{\Pi}|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle = 1$$

ii) $\hat{p}$. Il metodo più veloce è notare che $\Pi\psi = \psi$ e $\Pi\hat{p}\Pi = -\hat{p}$ per cui

$$\langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle = \langle\psi|\Pi\hat{p}\Pi|\psi\rangle = -\langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle \Longrightarrow \langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle = 0$$

Si può anche fare con calcolo diretto. Si ottiene un integrando dispari e quindi l'integrale è nullo.

Oppure usare $\hat{p}$ come funzione di a e a^+: $\hat{p}\psi \sim \text{coeff}\,|3\rangle + \text{coeff}\,|1\rangle$

iii) Hamiltoniana

$$\langle\psi|H|\psi\rangle = \frac{2}{3}\hbar\omega\left(2+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\hbar\omega\,\frac{1}{2} = \frac{11}{6}\hbar\omega$$

iv) $O = \hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x}$

Faremo il calcolo utilizzando gli operatori di salita e discesa. Bisogna stare però attenti alle CONVENZIONI.

Se $\psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\xi^2/2}$

$$\psi_2 = \sqrt{2}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\left(\xi^2-\frac{1}{2}\right)e^{-\xi^2/2}$$

allora $\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^+)^2\psi_0$ con

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x+\frac{ip}{m\omega}\right)$$

$$a^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x-\frac{ip}{m\omega}\right)$$

Se invece usiamo

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p-im\omega x) = -ia$$

$$\eta^+ = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p+im\omega x) = i\,a^+$$

allora $\psi_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta^+)^2\psi_0$. Quindi lo stato ψ ha due rappresentazioni diverse

$$\psi = \begin{cases} -\sqrt{\frac{2}{3}}|2\rangle e^{-2i\omega t}+\sqrt{\frac{1}{3}}|0\rangle & |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\eta^{+2}|0\rangle \\ +\sqrt{\frac{2}{3}}|2\rangle e^{-2i\omega t}+\sqrt{\frac{1}{3}}|0\rangle & |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}a^{+2}|0\rangle \end{cases}$$

Il valor medio è OVVIAMENTE INDIPENDENTE dalla rappresentazione scelta

Risulta $O = -i\hbar(\eta^{+2} - \eta^2) = i\hbar(a^{+2} - a^2)$

Ora [calcolo usando a, a^+]

$$a^+|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\, e^{-2i\omega t} a^+|2\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\, a^+|0\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}}\, e^{-2i\omega t} \sqrt{3}|3\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\, |1\rangle$$

$$= \sqrt{2}\, e^{-2i\omega t} |3\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\, |1\rangle$$

$$(a^+)^2|\psi\rangle = \sqrt{2}\, e^{-2i\omega t} a^+|3\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\, a^+|1\rangle$$

$$= \sqrt{2}\, e^{-2i\omega t} \sqrt{4}\,|4\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{2}\,|2\rangle$$

$$= 2\sqrt{2}\, e^{-2i\omega t} |4\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\, |2\rangle$$

$$\langle\psi|(a^+)^2|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\, e^{2i\omega t} \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} e^{2i\omega t}$$

Da questo ricaviamo anche

$$\langle\psi|a^2|\psi\rangle = \langle\psi|a^{+2}|\psi\rangle^* = \frac{2}{3} e^{-2i\omega t}$$

Si poteva ottenere questo risultato direttamente

$$a|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\, e^{-2i\omega t} a|2\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\, a|0\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\, e^{-2i\omega t} a a^{+2}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\, e^{-2i\omega t}\left([a, a^{+2}] + a^{+2}a\right)|0\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\, e^{-2i\omega t}\, 2a^+|0\rangle = \frac{2}{\sqrt{3}}\, e^{-2i\omega t} |1\rangle$$

$$a^2|\psi\rangle = \frac{2}{\sqrt{3}}\, e^{-2i\omega t} a|1\rangle = \frac{2}{\sqrt{3}}\, e^{-2i\omega t} a a^+|0\rangle$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\, e^{-2i\omega t}\left([a, a^+] + a^+ a\right)|0\rangle = \frac{2}{\sqrt{3}}\, e^{-2i\omega t}|0\rangle$$

$$\langle\psi|a^2|\psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\, \frac{2}{\sqrt{3}}\, e^{-2i\omega t} = \frac{2}{3} e^{-2i\omega t}$$

Quindi

$$\langle\psi|O|\psi\rangle = i\hbar\left(\langle\psi|a^{\dagger 2}|\psi\rangle - \langle\psi|a^2|\psi\rangle\right)$$

$$= i\hbar\,\frac{2}{3}\left(e^{2i\omega t} - e^{-2i\omega t}\right) =$$

$$= i\hbar\,\frac{2}{3}\cdot 2i\sin 2\omega t = -\frac{4}{3}\hbar\sin 2\omega t$$

Se avessimo fatto il calcolo con η, η^+

$$\eta^+|\psi\rangle = \eta^+\left(-\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,e^{-2i\omega t}|2\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{3}}|0\rangle\right)$$

$$= -\sqrt{2}\,e^{-2i\omega t}|3\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{3}}|1\rangle$$

$$\eta^{+2}|\psi\rangle = -2\sqrt{2}\,e^{-2i\omega t}|4\rangle + \sqrt{\tfrac{2}{3}}|2\rangle$$

$$\langle\psi|\eta^{+2}|\psi\rangle = -\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,e^{2i\omega t}\cdot\sqrt{\tfrac{2}{3}} = -\frac{2}{3}e^{2i\omega t}$$

$$\langle\psi|\eta^2|\psi\rangle = -\frac{2}{3}e^{-2i\omega t}$$

$$\langle\psi|O|\psi\rangle = -i\hbar\left(\langle\psi|\eta^{+2}|\psi\rangle - \langle\psi|\eta^2|\psi\rangle\right)$$

$$= -i\hbar\left(-\frac{2}{3}\right)\left(e^{2i\omega t} - e^{-2i\omega t}\right) = -\frac{4}{3}\hbar\sin 2\omega t$$

d) Abbiamo già visto che $\langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle = 0$. Per lo stesso motivo $\langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle$. Quindi

$$\Delta x^2 = \langle\psi(t)|x^2|\psi(t)\rangle = |x|\psi(t)\rangle|^2$$
$$\Delta p^2 = \langle\psi(t)|p^2|\psi(t)\rangle = |p|\psi(t)\rangle|^2$$

Ora $\quad x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\,(a + a^+)$

$$x|\psi(t)\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a + a^+)|\psi\rangle =$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-2i\omega t}|1\rangle + \sqrt{2}\,e^{-2i\omega t}|3\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{3}}|1\rangle\right]$$

Quindi

$$\Delta x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left[\left|\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-2i\omega t} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right|^2 + 2\right]$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\left[\frac{1}{3}(5+4\cos\omega t) + 2\right]$$

$$= \frac{\hbar}{6m\omega}(11+4\cos\omega t)$$

Ora $p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,(a^+ - a)$

$$p|\psi\rangle = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,(a^+ - a)|\psi\rangle$$

$$= i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left[\sqrt{2}\,e^{-2i\omega t}|3\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1\rangle - \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-2i\omega t}|1\rangle\right]$$

$$\Delta p^2 = \frac{1}{2}m\hbar\omega\left[2 + \left|\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-2i\omega t}\right|^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}m\hbar\omega\left[2 + \frac{1}{3}(5-4\cos\omega t)\right]$$

$$= \frac{1}{6}m\hbar\omega\left[11 - 4\cos\omega t\right]$$

$$\Delta x^2 \Delta p^2 = \frac{\hbar^2}{36}(121 - 16\cos^2\omega t)$$

Se fossero stati utilizzati (η, η^+) avremo avuto

$$x = -i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(\eta^+ - \eta) \qquad p = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,(\eta^+ + \eta)$$

$$x\psi = -i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(\eta^+ - \eta)|\psi\rangle =$$

$$= -i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[-\sqrt{2}\,e^{-2i\omega t}|3\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1\rangle - \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-2i\omega t}\right)|1\rangle\right)$$

$$= -i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[-\sqrt{2}\,e^{-2i\omega t}|3\rangle + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-2i\omega t} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)|1\rangle\right]$$

Il risultato per Δx^2 è quindi uguale al prec. (ovvio) 9

$$p\psi = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,(\eta^+ + \eta)\,|\psi>$$

$$= \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left[-\sqrt{2}\,e^{-2i\omega t}|3> + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|1> + \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\,e^{-2i\omega t}\right)|1>\right]$$

Il risultato per Δp^2 è identico al precedente come atteso

Esame di Meccanica Quantistica, 02/07/2019

Esercizio 1. Si consideri una particella di spin 1/2 libera di muoversi nel dominio bidimensionale $x \geq 0$, $0 \leq y \leq L$. L'Hamiltoniana à data da

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \alpha S_y + V(x, y)$$

dove $V(x, y) = 0$ se $x \geq 0$, $0 \leq y \leq L$; altrimenti $V(x, y) = \infty$. Il coefficiente α è positivo.

a) Si calcoli l'energia dello stato fondamentale del sistema.

b) Si considerino gli stati della forma

$$|\psi\rangle = \xi e^{-\xi^2/2}\left(A \sin\frac{\pi y}{L}\chi_+ + B \sin\frac{2\pi y}{L}\chi_-\right) \qquad \xi = x\sqrt{m\omega/\hbar},$$

per $x \geq 0$, $0 \leq y \leq L$. Gli spinori $\chi_\pm$ sono autofunzioni di S_z con autovalori $\pm\hbar/2$. Si determinino i possibili valori di A e B in modo che gli stati siano normalizzati e che la probabilità di misurare $S_z = \hbar/2$ sia uguale a quella di misurare $S_z = -\hbar/2$. Tra gli stati così determinati, si consideri nel seguito quello per cui A/B è reale positivo.

c) Si calcoli il valor medio $\langle\psi|H|\psi\rangle$.

d) Si calcoli il valor medio $\langle\psi, t|\xi^2 S_z|\psi, t\rangle$, dove $|\psi, t\rangle$ è l'evoluto di $|\psi\rangle$ al tempo t.

Esercizio 2. Si considerino tre elettroni. Siano $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$, $\boldsymbol{S}_3$ i tre operatori di spin associati, $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2 + \boldsymbol{S}_3$, $\boldsymbol{S}_{12} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$.

a) Si determinino gli autovalori dell'operatore S^2.

b) Si determini una base costituita da autovettori simultanei di S^2, S_z e S_{12}^2. Se esprimano gli elementi della base in termini dei ket $|s_{1z}s_{2z}s_{3z}\rangle$, autovettori degli operatori S_{1z}, S_{2z} e S_{3z} con autovalore $\hbar s_{1z}$, $\hbar s_{2z}$, $\hbar s_{3z}$. Ai fini della soluzione è utile notare l'ovvia identità $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_{12} + \boldsymbol{S}_3$.

c) Si assuma che l'Hamiltoniana sia

$$\mathcal{H} = \lambda(S_{1x}S_{2x} + S_{1y}S_{2y} + S_{1x}S_{3x} + S_{1y}S_{3y} + S_{2x}S_{3x} + S_{2y}S_{3y}).$$

Si riscriva l'Hamiltoniana in termini di S^2 e S_z.

d) Si calcoli lo spettro dell'Hamiltoniana. Si determinino gli autovalori e la relativa degenerazione. Per ciascun livello si determinini una base utilizzando gli stati specificati al punto b).

1

a) Il problema è separabile e le autofunzioni hanno la forma

$$|\psi\rangle = \psi_n(x)\,\phi_m(y)\,\chi_{y\pm}$$

dove $\psi_n(x)$ sono le autofunzioni dell'oscillatore armonico $\phi_m(y)$ le autofunzioni per il potenziale della buca infinita di larghezza L. e $\chi_{y\pm}$ sono le autofunzioni di S_y. A causa del vincolo $\psi_n(0)=0$ (per $x\leq 0$ $V(x,y)=+\infty$) vanno considerate solo le autofunzioni $\psi_n(x)$ con n dispari. Quindi lo stato fondamentale ha energia

$$E_f = \frac{3}{2}\hbar\omega + \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} - \frac{\alpha\hbar}{2}$$

b) Lo stato $n=1$ dell'oscillatore armonico definito su tutta la retta reale è

$$\psi_{n,\mathbb{R}}(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\sqrt{2}\,\xi\, e^{-\xi^2/2} \qquad n=1$$

Nel nostro caso lo stato deve essere normalizzato su $x\in[0,+\infty]$. Poniamo quindi $\psi_n(x) = c\,\psi_{n,\mathbb{R}}(x)$ $(n=1)$ dove c è una costante da determinare

$$1 = \int_0^\infty dx\,|\psi_n(x)|^2 = c^2\int_0^\infty dx\,|\psi_{n,\mathbb{R}}(x)|^2 = \frac{c^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,|\psi_{n,\mathbb{R}}(x)|^2 = \frac{c^2}{2}$$

Quindi $c=\sqrt{2}$. Quindi

$$\psi_1(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} 2\xi\, e^{-\xi^2/2}$$

Per la buca

$$\phi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

Quindi

$$|\psi\rangle = \left(\frac{\pi\hbar}{m\omega}\right)^{1/4} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{2}}\,\psi_1(x)\left[A\phi_1(y)\chi_+ + B\phi_2(y)\chi_-\right]$$

$|\psi\rangle$ è normalizzato se

$$\left(\frac{\pi\hbar}{m\omega}\right)^{1/2}\frac{L}{8}\left(|A|^2+|B|^2\right)=1$$

Le probabilità sono uguali se

$$\left(\frac{\pi\hbar}{m\omega}\right)^{1/2}\frac{L}{8}|A|^2 = \left(\frac{\pi\hbar}{m\omega}\right)^{1/2}\frac{L}{8}|B|^2 \implies |A|^2=|B|^2$$

Quindi, fissando le fasi possiamo scegliere

$$A=\frac{2}{\sqrt{L}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \qquad B = Ae^{i\varphi} \text{ con fase arbitraria}$$

Nel seguito prendiamo $A=B$ (A/B è reale positivo) e

$$|\psi\rangle = |\psi_1(x)\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1(y)\chi_+ + \phi_2(y)\chi_-\right)$$

c)

$$H|\psi\rangle = \frac{3}{2}\hbar\omega|\psi\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1(x)\left[\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\phi_1(y)\chi_+ + \frac{2\hbar^2\pi^2}{mL^2}\phi_2(y)\chi_-\right] + \alpha S_y|\psi\rangle$$

$$\langle\psi|H|\psi\rangle = \frac{3}{2}\hbar\omega + \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}+\frac{2\hbar^2\pi^2}{mL^2}\right) + \alpha\langle\psi|S_y|\psi\rangle$$

Ora

$$\langle\psi|S_y|\psi\rangle = \frac{1}{2}\langle\chi_+^*|S_y|\chi_+\rangle + \frac{1}{2}\langle\chi_-^*|S_y|\chi_-\rangle = 0$$

dato che S_y ~~non~~ ha gli elementi diagonali nulli (nella base di autof di S_z)

$$\langle\psi|H|\psi\rangle = \frac{3}{2}\hbar\omega + \frac{5}{4}\frac{\hbar^2\pi^2}{mL^2}$$

d) Per calcolare l'evoluto temporale dobbiamo riscrivere $\chi_\pm$ nelle base di autofunzioni di S_y. 3

$$S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$ Gli autoval sono $\pm\frac{\hbar}{2}$

$$\chi_{y+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_+ + i\chi_-) \qquad \chi_{y,-} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_+ - i\chi_-)$$

Quindi

$$\chi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_{y+} + \chi_{y-})$$

$$\chi_- = \frac{1}{\sqrt{2}i}(\chi_{y+} - \chi_{y-})$$

Quindi

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\psi_1(x)\phi_1(y)\chi_{y+} \longrightarrow \text{Energia} = \frac{3}{2}\hbar\omega + \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} + \frac{\alpha\hbar}{2}$$

$$+\frac{1}{2}\psi_1(x)\phi_1(y)\chi_{y-} \longrightarrow = \frac{3}{2}\hbar\omega + \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} - \frac{\alpha\hbar}{2}$$

$$-\frac{i}{2}\psi_1(x)\phi_2(y)\chi_{y+} \longrightarrow = \frac{3}{2}\hbar\omega + \frac{2\hbar^2\pi^2}{mL^2} + \frac{\alpha\hbar}{2}$$

$$+\frac{i}{2}\psi_1(x)\phi_2(y)\chi_{y-} \qquad = \frac{3}{2}\hbar\omega + \frac{2\hbar^2\pi^2}{mL^2} - \frac{\alpha\hbar}{2}$$

definiamo per semplicità $E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega + \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$

$$\hbar\Omega = \left(\frac{2\hbar^2\pi^2}{mL^2} - \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\right) = \frac{3\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}e^{-iE_0t/\hbar}\, e^{-i\alpha\hbar t/2\hbar}\,\psi_1(x)\phi_1(y)\chi_{y+}$$
$$+\frac{1}{2}e^{-iE_0t/\hbar}\, e^{i\alpha t/2}\,\psi_1(x)\phi_1(y)\chi_{y-}$$
$$-\frac{i}{2}e^{-iE_0t/\hbar}\, e^{-i\Omega t}\, e^{-i\alpha t/2}\,\psi_1(x)\phi_2(y)\chi_{y+}$$
$$+\frac{i}{2}e^{-iE_0t/\hbar}\, e^{-i\Omega t}\, e^{i\alpha t/2}\,\psi_1(x)\phi_2(y)\chi_{y-}$$

Moltiplichiamo lo stato per $e^{iE_0 t/\hbar}\, e^{i\alpha t/2}$

$$
\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle = &\ \frac{1}{2}\psi_1(x)\phi_1(y)\chi_{y+} \\
&+\frac{1}{2}e^{i\alpha t}\psi_1(x)\phi_1(y)\chi_{y-} \\
&-\frac{i}{2}e^{-i\Omega t}\psi_1(x)\phi_2(y)\chi_{y+} \\
&+\frac{i}{2}e^{-i\Omega t}e^{i\alpha t}\psi_1(x)\phi_2(y)\chi_{y-} \\
= &\ \frac{1}{2}\psi_1(x)\phi_1(y)\left(\chi_{y+}+e^{i\alpha t}\chi_{y-}\right) \\
&-\frac{i}{2}e^{-i\Omega t}\psi_1(x)\phi_2(y)\left(\chi_{y+}-e^{+i\alpha t}\chi_{y-}\right)
\end{aligned}
$$

Quindi

$$\langle\psi(t)|\xi^2 S_z|\psi(t)\rangle =$$

$$\frac{1}{4}\langle\psi_1|\xi^2|\psi_1\rangle\langle\chi_{y+}^* + e^{-i\alpha t}\chi_{y-}^*|S_z|\chi_{y+}+e^{i\alpha t}\chi_{y-}\rangle$$

$$+\frac{1}{4}\langle\psi_1|\xi^2|\psi_1\rangle\langle\chi_{y+}^* - e^{-i\alpha t}\chi_{y}^*|S_z|\chi_{y+}-e^{i\alpha t}\chi_{y-}\rangle$$

Ora

$$\langle\psi_1|\xi^2|\psi_1\rangle = \int_0^\infty dx\, \xi^2 |\psi_1|^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \xi^2\, 2|\psi_{1,\mathbb{R}}|^2 = \langle 1|\xi^2|1\rangle \leftarrow$$ nell'oscillatore armonico sulla retta

$$\langle 1|\xi^2|1\rangle = \frac{3}{2} \Longrightarrow \langle\psi_1|\xi^2|\psi_1\rangle = \frac{3}{2}$$

Calcoliamo ora i valori medi di S_z

$$\chi_{y+}+e^{i\alpha t}\chi_{y-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\chi_+(1+e^{i\alpha t}) + \frac{i}{\sqrt{2}}\chi_-(1-e^{i\alpha t})$$

Quindi

$$\langle \chi_{y+}^* + e^{-i\alpha t} \chi_{y-}^* | S_z | \chi_{y+} + e^{i\alpha t} \chi_{y-} \rangle$$
$$= \frac{1}{2} |1 + e^{i\alpha t}|^2 \frac{\hbar}{2} + \frac{1}{2} |1 - e^{i\alpha t}|^2 \left(-\frac{\hbar}{2}\right)$$
$$= \frac{\hbar}{2}(1+\cos\alpha t) - \frac{\hbar}{2}(1-\cos\alpha t) = \hbar\cos\alpha t$$

$$\langle \chi_{y+}^* - e^{-i\alpha t} \chi_{y-}^* | S_z | \chi_{y+} - e^{i\alpha t} \chi_{y-} \rangle$$
$$= \frac{1}{2} |1 - e^{i\alpha t}|^2 \frac{\hbar}{2} + \frac{1}{2} |1 + e^{i\alpha t}|^2 \left(-\frac{\hbar}{2}\right)$$
$$= \frac{\hbar}{2}(1-\cos\alpha t) - \frac{\hbar}{2}(1+\cos\alpha t) = -\hbar\cos\alpha t$$

Quindi

$$\langle \psi(t) | \xi^2 S_z | \psi(t) \rangle = 0$$

Esercizio 2:

(a) S_{12} corrisponde $\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$

$S = S_{12} + S_3$ corrisponde a $\frac{1}{2} \oplus 1 = \begin{cases} 3/2 \\ 1/2 \end{cases}$ e $\frac{1}{2} \oplus 0 = \frac{1}{2}$

Quindi S^2 può assumere i valori

$$\hbar^2 \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{4}\hbar^2 \quad \text{e} \quad \hbar^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}\hbar^2$$

(b) Calcoliamo prima gli stati di S_{12} nello spazio $|S_{1z} S_{2z}\rangle$

$$|1\,1\rangle_{12} = |\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle \qquad |\ \rangle_{12} = |S_{12}, S_{12,z}\rangle$$
$$|1\,0\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\tfrac{1}{2}\,{-\tfrac{1}{2}}\rangle + |{-\tfrac{1}{2}}\,\tfrac{1}{2}\rangle\right)$$
$$|0\,0\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\tfrac{1}{2}\,{-\tfrac{1}{2}}\rangle - |{-\tfrac{1}{2}}\,\tfrac{1}{2}\rangle\right)$$
$$|1\,{-1}\rangle_{12} = |{-\tfrac{1}{2}}\,{-\tfrac{1}{2}}\rangle$$

Quindi

$$|S\; S_{12}\; S_z\rangle$$

$$\left|\tfrac{3}{2}\;1\;\tfrac{3}{2}\right\rangle = |1\;1\rangle_{12}\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle_3 = \left|\tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

$$\left|\tfrac{3}{2}\;1\;\tfrac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|1\;1\rangle_{12}\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle_3 + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|1\;0\rangle_{12}\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle_3$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}\;-\tfrac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\tfrac{1}{2}\;-\tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\left|-\tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

$$\left|\tfrac{3}{2}\;1\;-\tfrac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|1\;0\rangle_{12}\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle_3 + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|1\;-1\rangle\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle_3$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\tfrac{1}{2}\;-\tfrac{1}{2}\;-\tfrac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\left|-\tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}\;-\tfrac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\left|-\tfrac{1}{2}\;-\tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

$$\left|\tfrac{3}{2}\;1\;-\tfrac{3}{2}\right\rangle = |1\;-1\rangle_{12}\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle_3 = \left|-\tfrac{1}{2}\;-\tfrac{1}{2}\;-\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

$$\left|\tfrac{1}{2}\;1\;\tfrac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|1\;1\rangle_{12}\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle_3 - \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|1\;0\rangle_{12}\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

$$= \sqrt{\tfrac{2}{3}}\left|\tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}\;-\tfrac{1}{2}\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}\left|\tfrac{1}{2}\;-\tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}\left|-\tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

$$\left|\tfrac{1}{2}\;1\;-\tfrac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|1\;0\rangle_{12}\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle_3 - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|1\;-1\rangle_{12}\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle_3$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\left|\tfrac{1}{2}\;-\tfrac{1}{2}\;-\tfrac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}\left|-\tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}\;-\tfrac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\left|-\tfrac{1}{2}\;-\tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

$$\left|\tfrac{1}{2}\;0\;\tfrac{1}{2}\right\rangle = |0\;0\rangle_{12}\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\tfrac{1}{2}\;-\tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left|-\tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

$$\left|\tfrac{1}{2}\;0\;-\tfrac{1}{2}\right\rangle = |0\;0\rangle_{12}\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\tfrac{1}{2}\;-\tfrac{1}{2}\;-\tfrac{1}{2}\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left|-\tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}\;-\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

$\cancel{c}$)

Ricordiamo che $S_{1x}^2 = S_{1y}^2 = S_{1z}^2 = \frac{\hbar^2}{4}$ (lo stesso per $\bar{S}_2$ e $\bar{S}_3$)

Quindi

$$S_x^2 = (S_{1x} + S_{2x} + S_{3x})^2 = S_{1x}^2 + S_{2x}^2 + S_{3x}^2 + 2(S_{1x}S_{2x} + S_{1x}S_{3x} + S_{2x}S_{3x})$$

$$S_y^2 = (S_{1y} + S_{2y} + S_{3y})^2 = S_{1y}^2 + S_{2y}^2 + S_{3y}^2 + 2(S_{1y}S_{2y} + S_{1y}S_{3y} + S_{2y}S_{3y})$$

Da cui

$$S_x^2 + S_y^2 = \frac{3\hbar^2}{4} + \frac{3\hbar^2}{4} + 2(S_{1x}S_{2x} + S_{1x}S_{3x} + S_{2x}S_{3x} + S_{1y}S_{2y} + S_{1y}S_{3y} + S_{2y}S_{3y})$$

Ne segue

$$H = \frac{\lambda}{2}\left(S_x^2 + S_y^2 - \frac{3\hbar^2}{2}\right) = \frac{\lambda}{2}\left(S^2 - S_z^2 - \frac{3\hbar^2}{2}\right)$$

d) Spettro

Stati $S = \frac{3}{2}$ $S_z = \pm\frac{3}{2}$, base $\left|\begin{matrix} S & S_{12} & S_z \\ \frac{3}{2} & 1 & \pm\frac{3}{2} \end{matrix}\right\rangle$

$$E = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{15}{4}\hbar^2 - \frac{9}{4}\hbar^2 - \frac{3\hbar^2}{2}\right) = 0 \qquad \text{deg. } 2$$

Stati $S = \frac{3}{2}$ $S_z = \pm\frac{1}{2}$ base $|\frac{3}{2}\ 1\ \pm\frac{1}{2}\rangle$

$$E = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{15}{4}\hbar^2 - \frac{\hbar^2}{4} - \frac{3\hbar^2}{2}\right) = \lambda\hbar^2 \qquad \text{deg. } 2$$

Stati $S = \frac{1}{2}$ $S_z = \pm\frac{1}{2}$ base $|\frac{1}{2}\ 1 \pm\frac{1}{2}\rangle, |\frac{1}{2}\ 0 \pm\frac{1}{2}\rangle$

$$E = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{3\hbar^2}{4} - \frac{\hbar^2}{4} - \frac{3}{2}\hbar^2\right) = -\frac{\lambda\hbar^2}{2} \qquad \text{deg. } 4$$

Esame di Meccanica Quantistica, 17/07/2019

Esercizio 1. Si considerino due particelle identiche di spin 1/2 e massa m vincolate a muoversi su una sfera di raggio $R = 1$. Siano $\boldsymbol{S}_1$ e $\boldsymbol{S}_2$ gli spin delle due particelle, $\boldsymbol{L}_1$ e $\boldsymbol{L}_2$ i loro momenti angolari e $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$, $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2$.
La funzione d'onda del sistema è data da

$$|\psi\rangle = A\,(\sin\theta_1\cos\phi_1 - \sin\theta_2\cos\phi_2)\,\chi(S_1, S_2),$$

dove $\chi(S_1, S_2)$ è la funzione d'onda (normalizzata) di spin.
a) Sapendo che $\chi(S_1, S_2)$ è un'autofunzione di S_z con autovalore nullo, la si esprima in termini dei ket $|s_{1z}s_{2z}\rangle$, autovettori degli operatori S_{1z} e S_{2z} con autovalore $\hbar s_{1z}$, $\hbar s_{2z}$. Si calcoli inoltre la costante A in modo che lo stato sia normalizzato.
b) Si effettua una misura della componente z del momento angolare di una delle due particelle. Quali valori possono essere ottenuti e con quale probabilità?
c) Si scriva lo stato $|\psi\rangle$ in termini di stati che siano autofunzioni simultanee di L_1^2, L_2^2, L^2, L_z, S^2 ed S_z.
d) L'Hamiltoniana del sistema è

$$H = \frac{\alpha}{\hbar}(J^2 + L^2) + \omega J_z$$

con $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$. In una misura di energia su $|\psi\rangle$ quali valori possono essere ottenuti e con quale probabilità?

Esercizio 2. Si consideri un sistema unidimensionale costituito da una particella di massa m vincolata a muoversi in una buca infinita con $|x| \leq L/2$, con Hamiltoniana

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + V_0(x),$$

$V_0(x) = 0$ all'interno della buca, $V_0(x) = +\infty$ all'esterno.
(a) Si aggiunga all'Hamiltoniana H_0 una perturbazione $V = \lambda \sin^2(\pi x/L)$; si determini l'energia dello stato fondamentale di $H_0 + V$ al primo ordine in λ.
(b) Si consideri una particella con funzione d'onda

$$\psi(x) = N\left[\sin(\pi x/L) + \sin(3\pi x/L) + e^{i\delta}\sqrt{2}\sin(2\pi x/L)\right],$$

dove N è una costante di normalizzazione. Si determini N in funzione di δ.
(c) Si fissi $\delta = \pi/2$. Si calcoli il valor medio dell'Hamiltoniana H_0 su ψ.
(d) Sempre per $\delta = \pi/2$, si determini la probabilità che una misura di H_0 sullo stato ψ dia il valore dell'energia corrispondente allo stato fondamentale o al primo stato eccitato di H_0.
I seguenti integrali possono essere utili nel calcolo. Si definisca

$$f(n, m) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx\, \sin(nx)\sin(mx)$$

Vale $f(1,1) = \pi/2$, $f(2,1) = 4/3$, $f(3,1) = 0$, $f(4,1) = -8/15$, $f(2,2) = \pi/2$, $f(3,2) = 4/5$, $f(4,2) = 0$, $f(3,3) = \pi/2$, $f(4,3) = 8/7$, $f(4,4) = \pi/2$.

Esercizio 1

(a)

Dato che la funzione d'onda spaziale è antisimmetrica sotto scambio, la parte di spin deve essere simmetrica. Quindi lo stato deve avere $S=1$. Essendo $S_z=0$ si tratta dello stato $|S=1\ S_z=0\rangle$

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle + |-\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle\right)$$

Per calcolare A riscriviamo

$$(\sin\theta_1\cos\phi_1 - \sin\theta_2\cos\phi_2) =$$

$$\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\sqrt{4\pi}\,\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta_1(e^{i\phi_1}+e^{-i\phi_1})\cdot\frac{1}{\sqrt{4\pi}} - \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta_2(e^{i\phi_2}+e^{-i\phi_2})\cdot\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\right]$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\Big[\left[-Y_1^1(\theta_1,\phi_1)+Y_1^{-1}(\theta_1,\phi_1)\right]Y_0^0(\theta_2,\phi_2) - \left[-Y_1^1(\theta_2,\phi_2)+Y_1^{-1}(\theta_2,\phi_2)\right]Y_0^0(\theta_1\phi_1)\Big]$$

Se introduciamo i ket $|\underset{\substack{\uparrow\\ L_1}}{\ell_1}\ \underset{\substack{\uparrow\\ L_2}}{\ell_2};\underset{\substack{\uparrow\\ L_{1z}}}{m_1}\ \underset{\substack{\uparrow\\ L_{2z}}}{m_2}\rangle_{L_{12}}$ otteniamo

$$= 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\Big(-|1\,0;1\,0\rangle_{L_{12}} + |1\,0;-1\,0\rangle_{L_{12}} + |0\,1;0\,1\rangle_{L_{12}} - |0\,1;0\,-1\rangle_{L_{12}}\Big)$$

Quindi

$$\psi = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\,A\left[-|1\,0;1\,0\rangle_{L_{12}} + |1\,0;-1\,0\rangle_{L_{12}} + |0\,1;0\,1\rangle_{L_{12}} - |0\,1;0\,-1\rangle_{L_{12}}\right]|S=1\ S_z=0\rangle_{spin}$$

Per ottenere A: Deve essere

$$\left(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 |A|^2 \cdot 4 = 1 \qquad |A| = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

per cui

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\Big[-|1\,1\,0;\,1\,0\rangle_{L_{12}} + |1\,1\,0;\,-1\,0\rangle_{L_{12}} + |0\,1;\,0\,1\rangle_{L_{12}}$$
$$-|0\,1;\,0\,-1\rangle_{L_{12}}\Big]\,|S=1\ S_z=0\rangle_{spin}$$

(b)

Consideriamo L_{1z}. Vi è uno stato con $L_{1z}=\hbar$ $(|1\,1\,0;\,1\,0\rangle_{L_{12}})$ uno stato con $L_{1z}=-\hbar$ $(|1\,1\,0;\,-1,\,0\rangle_{L_{12}})$ e due stati con $L_{1z}=0$ $(|0\,1;\,0\,1\rangle_{L_{12}}$ e $|0\,1;\,0\,-1\rangle_{L_{12}})$

Quindi

$$\text{Prob}\,(L_{1z}=+\hbar) = \frac{1}{4}$$
$$\text{Prob}\,(L_{1z}=-\hbar) = \frac{1}{4}$$
$$\text{Prob}\,(L_{1z}=0) = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

(c) Dato che gli stati hanno $L_1=1\ \ L_2=0 \Rightarrow L=1$
$L_1=0\ \ L_2=+1 \Rightarrow L=1$

Quindi nella base $|L\,L_1\,L_2;L_z\rangle_{tot}$ abbiamo

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\Big(-|1\,1\,0;\,1\rangle_{tot} + |1\,1\,0;\,-1\rangle_{tot}$$
$$+|1\,0\,1;\,1\rangle_{tot} - |1\,0\,1;\,-1\rangle_{tot}\Big)\,|S=1\ S_z=0\rangle_{spin}$$

<u>NOTA</u>: non possiamo semplificare la notazione scrivendo gli stati solo come $|L\,L_z\rangle_{tot}$ dato che due stati hanno $L_1=1,\ L_2=0$ e due stati hanno $L_1=0,\ L_2=1$.

(d)

Dobbiamo cambiare base passando alla base J, J_z. Dato che $L=1$ e $S=1$ per tutti i termini dobbiamo usare i Clebsch-Gordan per 1×1.

Nuova base $|J\,L\,S\,L_1\,L_2\,;J_z\rangle_J$. dato che $S=1$ e $L=1$ per tutti i termini ~~...~~ semplifichiamo la scrittura : $|J\,L_1\,L_2\,;J_z\rangle$ [L_1 e L_2 vanno sempre tenuti]

$$|\psi\rangle = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\,1\,0\,;1\rangle + |1\,1\,0\,;1\rangle\right)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\,1\,0\,;-1\rangle - |1\,1\,0\,;-1\rangle\right)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\,0\,1\,;1\rangle + |1\,0\,1\,;1\rangle\right)$$
$$-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\,0\,1\,;-1\rangle - |1\,0\,1\,;-1\rangle\right)$$

I possibili stati hanno $J=2,1$ e $J_z=1,-1$.
Quindi i valori misurabili sono

$$E(J=2, J_z=1) = \hbar\alpha(6+2)+\hbar\omega = \hbar(8\alpha+\omega)$$
$$E(J=2, J_z=-1) = \hbar\alpha(6+2)-\hbar\omega = \hbar(8\alpha-\omega)$$
$$E(J=1, J_z=1) = \hbar\alpha(2+2)+\hbar\omega = \hbar(4\alpha+\omega)$$
$$E(J=1, J_z=-1) = \hbar\alpha(2+2)-\hbar\omega = \hbar(4\alpha-\omega)$$

Le probabilita' sono tutte pari a $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Esercizio 2

(a)

$$\psi_{fond} = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \frac{\pi x}{L}$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{L^2} + \Delta E$$

$$\Delta E = \lambda \int_{-L/2}^{L/2} \sin^2 \frac{\pi x}{L} |\psi_{fond}|^2 dx$$

$$= \frac{2\lambda}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \cos^2 \frac{\pi x}{L} \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx \qquad \frac{\pi x}{L} = y$$

$$= \frac{2\lambda}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 y \sin^2 y \, dy$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 2y \, dy = \frac{\lambda}{2\pi} f(2,2) = \frac{\lambda}{4}$$

(b)

$$\langle\psi|\psi\rangle = |N|^2 \int_{-L/2}^{L/2} \Big[\sin^2 \frac{\pi x}{L} + \sin^2 \frac{3\pi x}{L} + 2 \sin^2 \frac{2\pi x}{L} \qquad y = \frac{\pi x}{L}$$

$$+ 2 \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{3\pi x}{L} + \sqrt{2} \left(e^{i\delta} + e^{-i\delta}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{2\pi x}{L} + \sin \frac{3\pi x}{L} \sin \frac{2\pi x}{L} \right) \Big] dx =$$

$$= |N|^2 \frac{L}{\pi} \Big[f(1,1) + f(3,3) + 2 f(2,2)$$

$$+ 2 f(3,1) + 2\sqrt{2} \cos\delta \left(f(2,1) + f(3,2) \right) \Big]$$

$$= |N|^2 \frac{L}{\pi} \left[2\pi + 2\sqrt{2} \cos\delta \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{5} \right) \right]$$

$$= |N|^2 \frac{L}{\pi}\left[2\pi + \frac{64}{15}\sqrt{2}\cos\delta\right]$$

A meno di una fase

$$N = \frac{1}{\sqrt{L}}\left[2 + \frac{64\sqrt{5}}{15\pi}\cos\delta\right]^{-1/2}$$

Se $\delta = \frac{\pi}{2}$ $\cos\delta = 0$ $N = \frac{1}{\sqrt{2L}}$

(c)

$$H_0\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{L^2}N\left[\sin\frac{\pi x}{L} + 9\sin\frac{3\pi x}{L} + 4i\sqrt{2}\sin\frac{2\pi x}{L}\right]$$

$$\langle\psi_0|H_0|\psi\rangle = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{L^2}N^2 \times$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} dx\left(\sin\frac{\pi x}{L} + \sin\frac{3\pi x}{L} - i\sqrt{2}\sin\frac{2\pi x}{L}\right)\times \qquad y = \frac{\pi x}{L}$$

$$\left(\sin\frac{\pi x}{L} + 9\sin\frac{3\pi x}{L} + 4i\sqrt{2}\sin\frac{2\pi x}{L}\right) =$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{L^2}\frac{1}{2L}\frac{L}{\pi}\Big[f(1,1) + 9f(3,1) + 4i\sqrt{2}f(2,1)$$

$$+ f(3,1) + 9f(3,3) + 4i\sqrt{2}f(3,2)$$

$$-i\sqrt{2}f(2,1) - 9if(3,2) + 8f(2,2)\Big]$$

$$= \frac{\hbar^2}{4m}\frac{\pi}{L^2}\left[\frac{\pi}{2} + 4i\sqrt{2}\frac{4}{3} + \frac{9\pi}{2} + 4i\sqrt{2}\frac{4}{5} - i\sqrt{2}\frac{4}{3} - 9i\frac{4}{5} + 8\frac{\pi}{2}\right] =$$

$$= \frac{\hbar^2}{4m}\frac{\pi}{L^2}\cdot 9\pi = \frac{9}{4}\frac{\hbar^2\pi^2}{mL^2}$$

NOTA: $\langle\psi_0|H_0|\psi\rangle$ DEVE ESSERE <u>REALE</u>

(d)

Calcoliamo

$$\langle \psi_0 | \psi \rangle = \sqrt{\frac{2}{L}} \int_{-L/2}^{L/2} dx \cos\frac{\pi x}{L} \psi(x) = 0 \quad \text{dato che } \psi(x) = -\psi(-x)$$

$$\langle \psi_1 | \psi \rangle = \sqrt{\frac{2}{L}} \int_{-L/2}^{L/2} dx \sin\frac{2\pi x}{L} \psi(x)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{L}} N \int_{-L/2}^{L/2} dx \sin\frac{2\pi x}{L} \left(\sin\frac{\pi x}{L} + \sin\frac{3\pi x}{L} + \sqrt{2}\, i \sin\frac{2\pi x}{L} \right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{L}{\pi} N \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy \sin 2y \left(\sin y + \sin 3y + \sqrt{2}\, i \sin 2y \right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{L}{\pi} N \left(f(2,1) + f(3,2) + \sqrt{2}\, i\, f(2,2) \right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{L}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2L}} \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{5} + \sqrt{2}\, i \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{32}{15} + i\sqrt{2} \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{Prob}\left(H_0 = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{L^2} \right) = 0$$

$$\text{Prob}\left(H_0 = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{4\pi^2}{L^2} \right) = \frac{1}{\pi^2} \left(\left(\frac{32}{15}\right)^2 + \frac{\pi^2}{2} \right)$$

Esame di Meccanica Quantistica, 16/09/2019. Compito A

Esercizio 1. Si consideri, nel sistema di riferimento del centro di massa, un sistema costituito da due particelle identiche di spin 1/2 la cui Hamiltoniana è data da

$$\mathcal{H} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{4}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)^2 + \omega\left(\frac{1}{\hbar}J^2 + J_z\right),$$

dove $\boldsymbol{L}$ è il momento angolare orbitale del sistema, $\boldsymbol{S}$ lo spin totale e $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$.

(a) Si trovino gli autovalori e gli autostati dell'Hamiltoniana per $E < 4\hbar\omega$ e se ne discuta la degenerazione.

(b) Si determinino tutti gli stati del sistema compatibili con la seguente condizione: una misura dell'energia E può dare solo valori $E \leq \frac{5}{2}\hbar\omega$.

(c) All'istante $t = 0$ viene fatta una misura sul sistema che, in quell'istante, si trova in uno degli stati trovati al punto (b). Viene misurato il momento angolare orbitale totale del sistema lungo l'asse z, ottenendo $L_z = \hbar$. Quale e' lo stato $|\psi\rangle$ del sistema dopo la misura? Quindi il sistema evolve per un tempo t. Quali valori di L^2 e L_z possono essere ottenuti all'istante t e con quale probabilità?

(d) Si consideri la Hamiltoniana $\mathcal{H}' = \mathcal{H} + V$, dove $V = \lambda\, \boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2\, (y_1 - y_2)^2$. Si calcoli l'energia dello stato fondamentale al primo ordine in λ.

Esercizio 2. E' dato un sistema quantistico a tre stati che denoteremo nel seguito come $|1\rangle$, $|2\rangle$ e $|3\rangle$, con la condizione $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$. L'Hamiltoniana di questo sistema è data da

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \hbar\omega_1\,(|1\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 3|) + \hbar\omega_3|2\rangle\langle 2| \\ &+ \hbar\omega_2\,(|1\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 3| + |1\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 1|)\end{aligned} \tag{1}$$

con $\omega_1, \omega_2, \omega_3 > 0$.

(a) Si trovino gli autovalori e gli autovettori normalizzati di $\mathcal{H}$, esprimendo questi ultimi come combinazioni lineari di $|1\rangle$, $|2\rangle$ e $|3\rangle$.

(b) E' dato l'operatore

$$\mathcal{M} = M_1\,|1\rangle\langle 1| + M_2\,|2\rangle\langle 2| + M_3\,|3\rangle\langle 3|.$$

All'istante $t = 0$ il sistema si trova in uno stato $|\psi\rangle$ tale che una misura di $\mathcal{M}$ dà M_1 con probabilità 1. Se viene fatta una misura di energia su $|\psi\rangle$, quali valori possono essere ottenuti e con quale probabilità?

(c) Si calcoli la probabilità $P(t)$ di ottenere, al tempo t, M_3 come risultato di una misura dell'osservabile $\mathcal{M}$. Si determini il più piccolo tempo t per cui tale probabilità à massima.

①

Esercizio ①

Nel sistema del CM possiamo introdurre la coordinata relativa $\bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$ ed il relativo impulso

$$H = \underbrace{\frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2}_{H_0} + \underbrace{\omega\left(\frac{1}{\hbar}J^2 + J_z\right)}_{H_1} \qquad \mu = \frac{m}{2}$$

①

Dato che $[H_0, H_1] = 0$ possiamo considerare una base simultanea

Consideriamo inizialmente una base ~~diretta~~ formata da autofunzioni spaziali di H_0 e autofunzioni dello spin totale. Per le autofunzioni di H_0 utilizziamo la base

$$|\underset{\underset{L^2}{\uparrow}}{n\, \ell}\ \underset{\underset{L_z}{\uparrow}}{m}\rangle \quad \text{con } E_{n\ell m} = \hbar\omega\left(n + \frac{3}{2}\right).$$

Livelli di H_0

$$E = \frac{3}{2}\hbar\omega \quad |000\rangle \xrightarrow{\text{sotto parità}} \psi_{000}(-\bar{r}) = +\psi_{000}(\bar{r})$$

$$E = \frac{5}{2}\hbar\omega \quad |11m\rangle,\ m = \pm 1, 0 \xrightarrow{\text{parità}} \psi_{11m}(-\bar{r}) = -\psi_{11m}(\bar{r})$$

$$E = \frac{7}{2}\hbar\omega \quad \begin{cases} |22m\rangle,\ m = \pm 2, \pm 1, 0 \\ |200\rangle \end{cases} \xrightarrow{\text{parità}} \begin{array}{l} \psi_{22m}(-\bar{r}) = +\psi_{22m}(\bar{r}) \\ \psi_{200}(-\bar{r}) = +\psi_{200}(\bar{r}) \end{array}$$

Per il principio di Pauli otteniamo i seguenti livelli (includiamo lo spin)

$$E = \frac{3}{2}\hbar\omega \quad |000\rangle|\underset{\underset{S}{\uparrow}}{0}\ \underset{\underset{S_z}{\uparrow}}{0}\rangle_S$$

$$E = \frac{5}{2}\hbar\omega \quad |11m\rangle|1, s_z\rangle_S \quad \begin{cases} m = \pm 1, 0 \\ s_z = \pm 1, 0 \end{cases}$$

(2)

$$E = \frac{7}{2}\hbar\omega \quad \begin{cases} |1\,2\,2\,m\rangle|0\,0\rangle_S & m = \pm 2, \pm 1, 0 \\ |1\,2\,0\,0\rangle|0\,0\rangle_S \end{cases}$$

Per diagonalizzare $\mathcal{H}$ dobbiamo ora passare alla base

$$|n\,\ell\,\ell_z\rangle|S\,S_z\rangle \longrightarrow |n\,\ell\,S\,J\,J_z\rangle$$

$$E = \frac{3}{2}\hbar\omega \quad \begin{matrix} L\oplus S \\ 0\oplus 0 \end{matrix} \longrightarrow |1\,0\,0\,0\,0\,0\rangle$$

$$E = \frac{5}{2}\hbar\omega \quad \begin{matrix} L\oplus S \\ 1\oplus 1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{cases} |1\,1\,1\,1\,0\,0\rangle \\ |1\,1\,1\,1\,1\,J_z\rangle \\ |1\,1\,1\,1\,2\,J_z\rangle \end{cases}$$

$$E = \frac{7}{2}\hbar\omega \quad \begin{matrix} L\oplus S \\ 2\oplus 0 \longrightarrow \\ 0\oplus 0 \longrightarrow \end{matrix} \begin{cases} |1\,2\,2\,0\,2\,J_z\rangle \\ |1\,2\,0\,0\,0\,0\rangle \end{cases}$$

Spettro di H

$|100000\rangle \qquad E = \frac{3}{2}\hbar\omega$

$|111100\rangle \qquad E = \frac{5}{2}\hbar\omega$

$$|1111 1 J_z\rangle \qquad E = \frac{5}{2}\hbar\omega + \hbar\omega(2+J_z) = \begin{cases} 7/2\,\hbar\omega & J_z = -1 \\ 9/2\,\hbar\omega & J_z = 0 \\ 11/2\,\hbar\omega & J_z = 1 \end{cases}$$

$|1112\,J_z\rangle \qquad E = \frac{5}{2}\hbar\omega + \hbar\omega(6+J_z)$ sempre $> 4\hbar\omega$

$|120000\rangle \qquad E = \frac{7}{2}\hbar\omega$

$|12202\,J_z\rangle \qquad E = \frac{7}{2}\hbar\omega + \hbar\omega(6+J_z)$ sempre $> 4\hbar\omega$

Quindi lo spettro di H è

$E = \frac{3}{2}\hbar\omega$ $\quad |\underset{n}{0}\,\underset{l}{0}\,\underset{s}{0}\,\underset{j}{0}\,\underset{j_z}{0}\rangle$ non degenere

$E = \frac{5}{2}\hbar\omega$ $\quad |1\,1\,1\,0\,0\rangle$ non degenere

$E = \frac{7}{2}\hbar\omega$ $\quad \begin{cases} |1\,1\,1\,1\,-1\rangle \\ |2\,0\,0\,0\,0\rangle \end{cases}$ deg 2

b) Dal calcolo in a)

$$\psi = a|00000\rangle + b|11100\rangle \qquad |a|^2+|b|^2=1 \text{ (normalit)}$$

c) Esprimiamo gli stati nella base $|n\,l\,l_z\,s\,s_z\rangle_{LS}$

$$\psi = a|0\,0\,\underset{\uparrow\, l_z}{0}\,0\,0\rangle + \frac{b}{\sqrt{3}}\Big[\,|1\,1\,\underset{\uparrow\, l_z}{1}\,1\,-1\rangle - |1\,1\,\underset{\uparrow\, l_z}{0}\,1\,0\rangle + |1\,1\,\underset{\uparrow\, l_z}{-1}\,1\,1\rangle\Big]$$

Dopo la misura lo stato viene proiettato sugli autostati di L_z con $L_z = 1$. Quindi

$$\psi \xrightarrow[\text{MISURA}]{} \frac{b}{\sqrt{3}}|1\,1\,1\,1\,-1\rangle \xrightarrow[\text{VIENE NORMALIZZATO}]{} \psi_0 = |1\,1\,1\,1\,-1\rangle$$

Per calcolare $\psi(t)$ è necessario riscrivere ψ_0 nella base $|n\,l\,s\,j\,j_z\rangle$.

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}|1\,1\,1\,\underset{j}{2}\,\underset{j_z}{0}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\,1\,1\,\underset{j}{1}\,\underset{j_z}{0}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1\,1\,1\,\underset{j}{0}\,\underset{j_z}{0}\rangle$$

Eliminando una fase

$$\psi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{6}}e^{-6i\omega t}|11120\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-2i\omega t}|11110\rangle +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{3}}|11100\rangle$$

④

Tutti i tre stati che appaiono in $\psi_0(t)$ hanno $l=1$. Quindi

$$\text{Prob}\,(L^2 = 2\hbar^2) = 1$$

Per calcolare le probabilità di L_z ritorniamo alla base $|n\, L\, L_z\, S\, S_z\rangle_{LS}$ (scriviamo solo $|L_z S_z\rangle$ dato che vale sempre $n=L=S=1$)

$$\psi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{6}} e^{-6i\omega t}\left[\sqrt{\frac{1}{6}}\,|\underset{l_z}{1}\,\underset{S_z}{-1}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|\underset{l_z}{0}\,\underset{S_z}{0}\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}}\,|\underset{l_z}{-1}\,\underset{S_z}{1}\rangle\right]$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-2i\omega t}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}|1\,-1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|-1\,1\rangle\right]$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}|1\,-1\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|1\,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|-1\,1\rangle\right]$$

$$\text{Prob}\,(L_z = \hbar) = \left|\frac{1}{6}e^{-6i\omega t} + \frac{1}{2}e^{-2i\omega t} + \frac{1}{3}\right|^2$$

$$= \frac{1}{9}\cos 6\omega t + \frac{1}{6}\cos 4\omega t + \frac{1}{3}\cos 2\omega t + \frac{7}{18}$$

$$\text{Prob}\,(L_z = -\hbar) = \left|\frac{1}{6}e^{-6i\omega t} - \frac{1}{2}e^{-2i\omega t} + \frac{1}{3}\right|^2$$

$$= \frac{1}{9}\cos 6\omega t - \frac{1}{6}\cos 4\omega t - \frac{1}{3}\cos 2\omega t + \frac{7}{18}$$

$$\text{Prob}\,(L_z = 0) = \left|\frac{1}{3}e^{-6i\omega t} - \frac{1}{3}\right|^2 = \frac{2}{9}(1-\cos 6\omega t)$$

d)

Lo stato fondamentale di H è $|\underset{n}{0}\,\underset{l}{0}\,\underset{l_z}{0}\rangle|\underset{s}{0}\,\underset{S_z}{0}\rangle$

Quindi per H' l'energia dello stato fondamentale è

$$E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega + \Delta E \qquad \Delta E = \langle\psi_0|V|\psi_0\rangle$$

4

$$\langle \varphi_0 | V | \varphi_0 \rangle = \underset{n\ l\ l_z}{\langle 0\,0\,0 |} \, \lambda \overset{\text{coordinata relativa}}{y^2} \underset{n\ l\ l_z}{| 0\,0\,0 \rangle} \underset{S\ S_z}{\langle 0\,0 |} S_1 \cdot S_2 \underset{S\ S_z}{| 0\,0 \rangle}$$

Ora

$$\langle 0\,0 | S_1 \cdot S_2 | 0\,0 \rangle = \frac{1}{2} \langle 0\,0 | S^2 - S_1^2 - S_2^2 | 0\,0 \rangle$$

$$= \frac{1}{2}\left(0 - \frac{3}{4}\hbar^2 - \frac{3}{4}\hbar^2\right) = -\frac{3}{4}\hbar^2$$

Passando dalla base sferica a quella cartesiana

$$|n=0\ \ l=0\ \ l_z=0\rangle = |n_x=0, n_y=0, n_z=0\rangle$$

Quindi

$$\underset{n_x\ n_y\ n_z}{\langle 0\,0\,0 |} \, \lambda y^2 \underset{n_x\ n_y\ n_z}{| 0\,0\,0 \rangle} = \lambda \underbrace{\langle 0 | y^2 | 0 \rangle}_{1\text{-dimensione}} = \lambda \cdot \frac{\hbar}{2 \underset{\uparrow}{\mu} \omega}$$

MASSA RIDOTTA

<u>NOTA</u>: nel calcolo va utilizzata H_0 dove appare la massa ridotta μ. Quindi

$$\langle \varphi_0 | V | \varphi_0 \rangle = \lambda \frac{\hbar}{2\mu\omega} \cdot \left(-\frac{3}{4}\hbar^2\right) = -\lambda \frac{3\hbar^3}{8\mu\omega} = -\lambda \frac{3\hbar^3}{4m\omega}$$

$$E = \frac{3}{2}\hbar\omega \left(1 - \frac{\lambda}{2} \frac{\hbar^2}{m\omega^2}\right)$$

Esercizio 2

$$H = \begin{pmatrix} \hbar(\omega_1+\omega_2) & 0 & \hbar\omega_2 \\ 0 & \hbar\omega_3 & 0 \\ \hbar\omega_2 & 0 & \hbar(\omega_1+\omega_2) \end{pmatrix}$$

(a)

Autovalori: $E = \hbar\omega_1,\ \hbar(\omega_1+2\omega_2),\ \hbar\omega_3$

$$\begin{cases} v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1) & E = \hbar\omega_1 \\ v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) & E = \hbar(\omega_1+2\omega_2) \\ v_3 = (0,1,0) & E = \hbar\omega_3 \end{cases}$$

(b) $\psi = |1\rangle$

$$\psi = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$$

$$c_1 = \langle v_1|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad\Longrightarrow\quad P(E=\hbar\omega_1) = \frac{1}{2}$$

$$c_2 = \langle v_2|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad P(E=\hbar(\omega_1+2\omega_2)) = \frac{1}{2}$$

$$c_3 = \langle v_3|\psi\rangle = 0 \qquad P(E=\hbar\omega_3) = 0$$

(c)

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-iE_1 t/\hbar} v_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-iE_2 t/\hbar} v_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cancel{e^{-i\omega_1 t}} \left(v_1 + e^{-2i\omega_2 t} v_2 \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + e^{-2i\omega_2 t}, 0, 1 - e^{-2i\omega_2 t}\right)$$

$$P(t) = |\langle 3|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{4}|1 - e^{-2i\omega_2 t}|^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega_2 t)$$

Massimo per $2\omega_2 t = \pi \qquad t = \frac{\pi}{2\omega_2}$

Esame di Meccanica Quantistica, 20/11/2019

Esercizio 1. Si consideri una particella di spin 1/2 libera di muoversi su una sfera. Lo stato è definito dallo spinore normalizzato

$$|\psi_0\rangle = A \begin{pmatrix} \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sqrt{5}\sin^2\theta e^{2i\phi} \end{pmatrix}$$

dove A è una costante di normalizzazione e lo spinore è riferito ad S_z.

a) Si calcoli la costante A in modo che $|\psi_0\rangle$ sia normalizzato. In una misura di L_z su $|\psi_0\rangle$ quali valori si possono ottenere e con quale probabilità?

b) Al tempo $t = 0$ viene fatta una misura di L^2 su $|\psi_0\rangle$ ottenendo $2\hbar^2$. Quale è lo stato $|\psi_1\rangle$ in cui si trova la particella dopo la misura?

c) Lo stato $|\psi_1\rangle$ evolve sotto l'azione della Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{\omega}{\hbar} J^2,$$

dove $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$. Si calcoli lo stato $|\psi_1(t)\rangle$ al tempo t. Quali valori di L_z si possono ottenere al tempo t e con quale probabilità?

d) Si calcoli l'elemento di matrice $\langle\psi_1(t)|S_z|\psi_1(t)\rangle$.

Esercizio 2. Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω e gli stati

$$|\psi\rangle = C_0\,|0\rangle + C_1\,|1\rangle + C_2\,|2\rangle\,,$$

dove $|n\rangle$ sono gli autostati normalizzati della Hamiltoniana.

a) Si determinino tutti gli stati $|\psi\rangle$ tali che: i) $\langle\psi|\psi\rangle = 1$; ii) il valore medio della Hamiltoniana è $\hbar\omega$; iii) il valore medio della parità $\hat{P}$ è $2/3$.

b) Si fissino le fasi degli autostati della Hamiltoniana assumendo che essi siano definiti come $|n\rangle = N_n(a^\dagger)^n|0\rangle$ con N_n costante reale positiva, $a^\dagger = (x/x_0 - ipx_0/\hbar)/\sqrt{2}$ e $x_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$. Tra gli stati $|\psi\rangle$ trovati al punto a) si determini quello tale che: i) C_0/C_1 è reale; ii) $\langle\psi|p|\psi\rangle = -\hbar/(3\sqrt{2}x_0)$; iii) $\langle\psi|x|\psi\rangle = -x_0/\sqrt{2}$.

c) Per lo stato trovato al punto b), si calcoli l'evoluto temporale $|\psi(t)\rangle$; si calcoli il valor medio $\bar{p}(t) = \langle\psi(t)|p|\psi(t)\rangle$ ed il più piccolo tempo t^* al quale $\bar{p}(t^*) = \hbar/(\sqrt{2}x_0)$.