Esame di Meccanica Quantistica, 28/01/2020

Esercizio 1. Nel sistema di riferimento del centro di massa, l'Hamiltoniana di un sistema tridimensionale composto da due particelle identiche di spin 1/2 e massa m è data da

$$H_0 = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\,\omega^2 r^2 - 4\frac{\omega}{\hbar}\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2\,,$$

dove $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$, $\mu = m/2$ è la massa ridotta e $\boldsymbol{S}_1$ e $\boldsymbol{S}_2$ sono gli spin delle due particelle.

a) Si determini l'energia dello stato fondamentale e dei primi due stati eccitati, se ne discuta la degenerazione e si specifichino le corrispondenti autofunzioni.

b) Si consideri l'Hamiltoniana $H = H_0 + V$, con

$$V = \lambda\,\frac{\omega}{\hbar}\left(J^2 + \hbar J_z\right)\,,$$

dove $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$ è il momento angolare totale del sistema, $\boldsymbol{L}$ il momento angolare orbitale ed $\boldsymbol{S}$ lo spin totale; il coefficiente $\lambda \ll 1$ è positivo. Si calcolino le energie degli stati con energia $E < E_0 + \hbar\omega/2$, dove E_0 è l'energia dello stato fondamentale di H_0. Si specifichi la degenerazione di ciascun stato.

c) Si determinino i valori possibili di una misura di L_z e le corrispondenti probabilità per lo stato fondamentale dell'Hamiltoniana $H = H_0 + V$.

d) Si calcoli il valor medio di r^2 sullo stato fondamentale dell'Hamiltoniana $H = H_0 + V$.

Esercizio 2. Un fascio di particelle di spin 1/2 passa attraverso un dispositivo di Stern-Gerlach (SG) nel quale è presente un campo magnetico $\boldsymbol{B}_1$. Tale vettore giace nel piano xz e forma un angolo θ rispetto all'asse z. Sia S_θ la proiezione dell'operatore di spin $\boldsymbol{S}$ lungo il campo magnetico.

a) Si scriva S_θ come combinazione lineare di S_x e S_z e se ne dia la rappresentazione matriciale nella base di autovettori di S_z.

b) Si determinino gli autovalori di S_θ ed i relativi autovettori. Si esprimano questi ultimi come combinazioni lineari degli spinori $\Psi_s^{m_s}$, autovettori di S_z con autovalore $\hbar m_s$.

c) All'uscita dall'apparato SG vengono selezionate le particelle con spin orientato lungo il campo magnetico $\boldsymbol{B}_1$ e scartate quelle di spin opposto. Calcolare il valore atteso dello spin S_x sulle particelle selezionate.

d) Le stesse particelle vengono infine portate in un secondo apparato SG nel quale è presente un campo magnetico diretto lungo l'asse z. Si calcoli il rapporto fra il numero di particelle negli stati $\Psi_{1/2}^{1/2}$ e $\Psi_{1/2}^{-1/2}$ all'uscita dell'apparato. Può essere utile notare che tale rapporto è uguale al rapporto delle probabilità di misurare $S_z = \hbar/2$ e $S_z = -\hbar/2$ sulle particelle selezionate al punto c).

Esercizio 1) ①

Domanda a)

Innanzitutto notiamo che il termine in H_0 che contiene lo spin può essere riscritto come

$$-\frac{4\omega}{\hbar} S_1 \cdot S_0 = -\frac{2\omega}{\hbar}\left(S^2 - S_1^2 - S_2^2\right) \qquad \bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2$$

$$= -\frac{2\omega}{\hbar}\left(S^2 - \frac{3}{2}\hbar^2\right)$$

$$= \begin{cases} -\hbar\omega & S = 1 \\ +3\hbar\omega & S = 0 \end{cases}$$

Per calcolare lo spettro notiamo che le autofunzioni di H_0 possono essere scritte come

$$\psi_n(\vec{r})\,|S\ S_z\rangle \qquad \text{dove } \psi_n(\vec{r}) \text{ autofunzione dell'oscill. isotropo 3D}$$

Sotto scambio $r \to -r$ e quindi

$$\psi_n(r) \longrightarrow (-1)^n \psi_n(r)$$

$$|S\ S_z\rangle \begin{cases} \to -|S\ S_z\rangle & \text{per } S = 0 \\ \to +|S\ S_z\rangle & \text{per } S = 1 \end{cases}$$

Quindi gli unici stati possibili hanno

$$\begin{cases} n \text{ pari e } S = 0 \\ n \text{ dispari e } S = 1 \end{cases}$$

In assenza del termine $\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2$ lo spettro sarebbe

$n=0 \quad E = \frac{3}{2}\hbar\omega \quad S=0 \quad$ deg. $1\times1=1$

$n=1 \quad E = \frac{5}{2}\hbar\omega \quad S=1 \quad$ deg. $3\times3=9$

$n=2 \quad E = \frac{7}{2}\hbar\omega \quad S=0 \quad$ deg. $6\times1=6$

$n=3 \quad E = \frac{9}{2}\hbar\omega \quad S=1 \quad$ deg $\underset{\text{spaziale}}{10} \times \underset{\text{spin}}{3} = 30$

Se ora includiamo il termine di spin abbiamo

STATO FOND

$(n=1, S=1)$ $\quad E = \frac{5}{2}\hbar\omega - \hbar\omega = \frac{3}{2}\hbar\omega$ deg. 9

$(n=3, S=1)$ $\quad E = \frac{9}{2}\hbar\omega - \hbar\omega = \frac{7}{2}\hbar\omega$ deg. 30

$(n=0, S=0)$ $\quad E = \frac{3}{2}\hbar\omega + 3\hbar\omega = \frac{9}{2}\hbar\omega$ deg. 1

$(n=5, S=1)$ $\quad E = \frac{13}{2}\hbar\omega - \hbar\omega = \frac{11}{2}\hbar\omega$ deg. 21×3 $\left(\frac{4° \text{ eccitato}}{\text{da non considerare}}\right)$

⋮

Domanda b)

Dato che $\lambda \ll 1$ dobbiamo solo considerare l'effetto di V sullo stato fondamentale di H_0.

Lo stato $n=1$ dell'oscillatore armonico 3D ha $L=1$

Quindi $\quad L \oplus S = J$

$$1 \oplus 1 = \begin{cases} 2 \\ 1 \\ 0 \end{cases}$$

Quindi i 9 stati dello stato fondamentale possono essere scritti come $|n\ L\ S\ J\ J_z\rangle_J$ con

$|1\ 1\ 1\ 2\ m\rangle_J$ $\quad m = -2 \dots 2$ $\quad V = \lambda\hbar\omega(6+m)$

$|1\ 1\ 1\ 1\ m\rangle_J$ $\quad m = -1, 0, 1$ $\quad V = \lambda\hbar\omega(2+m)$

$|1\ 1\ 1\ 0\ 0\rangle_J$ $\quad V = 0$

Quindi lo spettro è non degenere

$E = \frac{3}{2}\hbar\omega$ $\quad |1\ 1\ 1\ 0\ 0\rangle_J$

$E = \left(\frac{3}{2} + \lambda\right)\hbar\omega$ $\quad |1\ 1\ 1\ 1\ -1\rangle_J$

$E = \left(\frac{3}{2} + 2\lambda\right)\hbar\omega$ $\quad |1\ 1\ 1\ 1\ 0\rangle_J$

$$E = \left(\frac{3}{2} + 3\lambda\right)\hbar\omega \quad |1\,1\,1\,1\,-1\rangle_J$$

$$E = \left(\frac{3}{2} + 4\lambda\right)\hbar\omega \quad |1\,1\,1\,2\,-2\rangle_J$$

$$E = \left(\frac{3}{2} + 5\lambda\right)\hbar\omega \quad |1\,1\,1\,2\,-1\rangle_J \qquad \text{ecc.}$$

Domanda c)

Lo stato fondamentale è $|1\,1\,1\,0\,0\rangle_J$

Lo riscriviamo in termini di $|n\,L\,S\,L_z\,S_z\rangle_{LS}$

$$|1\,1\,1\,0\,0\rangle_J = \sqrt{\frac{1}{3}}\Big(|1\,1\,1\,1\,-1\rangle_{LS} - |1\,1\,1\,0\,0\rangle_{LS} + |1\,1\,1\,\underset{\substack{\uparrow \\ L_z}}{-1}\,1\rangle_{LS}\Big)$$

$$\text{Prob}(L_z = +\hbar) = \text{Prob}(L_z = 0) = \text{Prob}(L_z = -\hbar) = \frac{1}{3}$$

Domanda d)

Scriviamo

$$|1\,1\,1\,m\,S_z\rangle_{LS} = R_1(r)\,Y_1^m(\theta,\varphi)\,|S\,S_z\rangle$$

Per ricavare $R_1(r)$ notiamo che

$$|n_x = 0 \;\; n_y = 0 \;\; n_z = 1\rangle = R_1(r)\,Y_1^0(\theta,\varphi)$$

per l'oscillatore 3D. Ora

$$|n_x = 0 \;\; n_y = 0 \;\; n_z = 1\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4}\sqrt{2}\,\xi_z\, e^{-\rho^2/2}$$

con

$$\xi_z = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,z \qquad \rho = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,r.$$

Si noti che $m = \mu$ (massa ridotta) nel nostro problema

Dato che $\xi_z = \rho\cos\theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,\rho\,Y_1^0(\theta,\varphi)$

Otteniamo $R_1(r) = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4} \rho e^{-\rho^2/2}$ ④

Ora, per l'ortogonalità delle funzioni d'onda spinoriali, se $|n L S L_z S_z\rangle = |n L L_z\rangle_L |S S_z\rangle$, abbiamo

$$_J\langle 1 1 1 0 0 | r^2 | 1 1 1 0 0 \rangle_J = \frac{1}{3}\Big[{}_L\langle 1 1 1 | r^2 | 1 1 1\rangle_L +$$

$$+ {}_L\langle 1 1 0 | r^2 | 1 1 0 \rangle_L + {}_L\langle 1 1 -1 | r^2 | 1 1 -1\rangle_L \Big]$$

Ora

$$\langle r^2 \rangle = \frac{1}{3}\int r^2 dr\, d\Omega \cdot r^2 \left(R_1^2 |Y_1^1|^2 + R_1^2 |Y_1^0|^2 + R_1^2 |Y_1^{-1}|^2 \right)$$

Dato che $\int d\Omega\, |Y_1^m|^2 = 1$ (le armoniche sono normalizzate)

$$\langle r^2 \rangle = \int dr\, r^4 R_1^2$$

$$= \left(\frac{\hbar}{\mu\omega}\right)^{5/2} \int_0^\infty d\rho\, \rho^4 R_1^2$$

$$= \left(\frac{\hbar}{\mu\omega}\right)^{5/2} \frac{8\pi}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi^3}} \left(\frac{\mu\omega}{\hbar}\right)^{3/2} \int d\rho\, \rho^6 e^{-\rho^2}$$

$$= \frac{\hbar}{\mu\omega} \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \int d\rho\, \rho^6 e^{-\alpha\rho^2} \Big|_{\alpha=1}$$

$$= \frac{\hbar}{\mu\omega} \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \left(-\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3}\right) \int_0^\infty d\rho\, e^{-\alpha\rho^2} \Big|_{\alpha=1}$$

$$= \frac{\hbar}{\mu\omega} \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \left(-\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3}\right) \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\alpha^{-1/2}\right) \Big|_{\alpha=1}$$

$$= \frac{\hbar}{\mu\omega} \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} (-1)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$= \frac{\hbar}{\mu\omega} \frac{4}{3} \cdot \frac{15}{8} = \frac{5}{2}\frac{\hbar}{\mu\omega}$$

Calcolo alternativo usando la base cartesiana $|n_x\, n_y\, n_z\rangle_C$

$$|1\,1\,1\rangle_L = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\,0\,0\rangle_C + i\,|0\,1\,0\rangle_C\right)$$

$$|1\,1\,0\rangle_L = |0\,0\,1\rangle_C$$

$$|1\,1\,-1\rangle_L = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\,0\,0\rangle_C - i\,|0\,1\,0\rangle_C\right)$$

NB: le fasi di $|1\,1\,1\rangle_L$, $|1\,1\,0\rangle_L$, $|1\,1\,-1\rangle_L$ qui sono irrilevanti dato che dobbiamo calcolare dei valori medi

Notiamo che per un oscillatore 1D $\langle 1|x^2|0\rangle = \langle 0|x^2|1\rangle = 0$
Quindi termini come ${}_C\langle 1\,0\,0|r^2|0\,1\,0\rangle_C$ sono nulli.. Ne segue che

$${}_L\langle 1\,1\,1|r^2|1\,1\,1\rangle_L = \frac{1}{2}\,{}_C\langle 1\,0\,0|r^2|1\,0\,0\rangle_C + \frac{1}{2}\langle 0\,1\,0|r^2|0\,1\,0\rangle_C$$

$$= {}_1\langle 1\,0\,0|r^2|1\,0\,0\rangle_1 = \langle 1|x^2|1\rangle + 2\langle 0|x^2|0\rangle$$

$${}_L\langle 1\,1\,-1|r^2|1\,1\,-1\rangle_L = \text{è identico al precedente}$$
$$= \langle 1|x^2|1\rangle + 2\langle 0|x^2|0\rangle$$

$${}_L\langle 1\,1\,0|r^2|1\,1\,0\rangle_L = {}_C\langle 0\,0\,1|r^2|0\,0\,1\rangle_C =$$
$$= \langle 1|x^2|1\rangle + 2\langle 0|x^2|0\rangle$$

Quindi

$$\langle r^2\rangle = \langle 1|x^2|1\rangle + 2\langle 0|x^2|0\rangle$$
$$= \cancel{\langle}\,|x|1\rangle|^2 + 2\,|x|0\rangle|^2 = \frac{3}{2}\frac{\hbar}{\mu\omega} + 2\cdot\frac{1}{2}\frac{\hbar}{\mu\omega} = \frac{5}{2}\frac{\hbar}{\mu\omega}$$

Esercizio 2)

a) $S_\theta = \sin\theta\, S_x + \cos\theta\, S_z$

$$S_\theta = \frac{\hbar}{2}\left(\sin\theta\,\sigma_x + \cos\theta\,\sigma_z\right) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

b) Trattandosi di una componente di $\bar{S}$, gli autovalori sono $\pm\hbar/2$

Autovettori $|+\hbar/2\rangle_\theta = \left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right)$

$|-\hbar/2\rangle_\theta = \left(\sin\frac{\theta}{2}, -\cos\frac{\theta}{2}\right)$

c)

Le particelle selezionate sono nello stato $|+\hbar/2\rangle_\theta$. Quindi

$$\langle S_x\rangle = \left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right)\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ \sin\theta/2 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\sin\theta$$

d)

$$|+\frac{\hbar}{2}\rangle_\theta = \cos\frac{\theta}{2}\,|S_z = +\frac{\hbar}{2}\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\,|S_z = -\frac{\hbar}{2}\rangle$$

$$R = \frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$$

Esame di Meccanica Quantistica, 14/02/2020

Esercizio 1. Una particella di carica e, massa m e spin 1/2, vincolata a muoversi lungo l'asse x, è immersa in un campo magnetico di intensità B con potenziale vettore $\boldsymbol{A} = (0, Bx, 0)$, $B > 0$. L'Hamiltoniana del sistema, nel sistema di Gauss, è

$$H_0 = H_{\rm em} + \frac{|e|}{mc}\mathbf{S}\cdot\mathbf{B},$$

dove $H_{\rm em}$ è l'Hamiltoniana per una particella libera in campo elettromagnetico ristretta all'asse x, ossia con $p_y = p_z = 0$ (se si desidera utilizzare il sistema internazionale, si sostituisca e/c con e).

a) Si determini lo spettro dell'Hamiltoniana e la degenerazione dei livelli.

b) Sono dati gli operatori

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}}\left(p_x\,\sigma_1 + m\omega x\,\sigma_2\right) \qquad Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}}\left(p_x\,\sigma_2 - m\omega x\,\sigma_1\right),$$

dove σ_i sono le matrici di Pauli e $\omega = |e|B/(mc)$ (sistema di Gauss; nel SI $\omega = |e|B/m$). Si mostri che i due operatori sono hermitiani e che valgono le relazioni $Q_1^2 = H_0$ e $Q_2^2 = H_0$ (sarà data una valutazione positiva alla domanda solo in presenza del calcolo dettagliato). Si spieghi come tali relazioni implichino che gli autovalori di H_0 sono solo nonnegativi.

c) Si scrivano l'Hamiltoniana e gli operatori Q_1 e Q_2 in termini di operatori di creazione/distruzione (salita/discesa) relativi ad un oscillatore armonico unidimensionale di pulsazione ω. Si calcolino $\{Q_1, Q_2\} \equiv Q_1Q_2 + Q_2Q_1$ ed i commutatori $[Q_i, H_0]$ per $i = 1, 2$.

d) Si calcoli il campo magnetico associato al potenziale vettore $\boldsymbol{A} = (0, B(x - \lambda x^3), 0)$. Assumendo che λ sia molto piccolo, si esprima la Hamiltoniana H in presenza del nuovo campo magnetico come $H = H_0 + \lambda V$, al primo ordine in λ. Si riporti l'espressione esplicita di V.

e) Si calcoli l'energia dello stato fondamentale di H al primo ordine in λ, utilizzando la teoria perturbativa. Si assuma $\lambda > 0$.

Integrali utili:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ax^2}\, x^{2n} = a^{-1/2-n}\,\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$$

con $n!! = n(n-2)(n-4)\cdots 1$ oppure 2 a seconda che l'intero positivo n sia dispari o pari.

Esercizio 2. Si consideri, nel sistema di riferimento del centro di massa, un sistema tridimensionale costituito da due particelle identiche di spin 1/2 la cui Hamiltoniana è data da

$$\mathcal{H}_0 = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - \frac{e^2}{r} + \frac{2\omega}{\hbar}\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2 + g_0\,\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2),$$

dove ω e g_0 sono due costanti positive, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ e $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ con $B > 0$.

a) Si trovino le energie dei primi due livelli della Hamiltoniana, la loro degenerazione ed i corrispondenti autostati in funzione del campo magnetico.

b) Si determini per quale valore del campo magnetico lo stato di energia più bassa è degenere e il grado di degenerazione.

c) In assenza di campo magnetico, si determini al primo ordine in teoria delle perturbazioni l'energia dello stato fondamentale della Hamiltoniana $H = H_0 + V$ con

$$V = -\frac{1}{16m^3c^2}\left[(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2)^2\right]^2.$$

Formule utili. Le autofunzioni di un sistema idrogenoide (Coulombiano) hanno la forma $R_{n,l}(r)Y_l^m(\theta,\phi)$, dove $Y_l^m(\theta,\phi)$ sono le armoniche sferiche e

$$
\begin{aligned}
R_{1,0}(r) &= 2\left(\frac{1}{r_0}\right)^{3/2} e^{-r/r_0} \\
R_{2,0}(r) &= 2\left(\frac{1}{2r_0}\right)^{3/2}\left[1-\left(\frac{r}{2r_0}\right)\right] e^{-r/2r_0} \\
R_{2,1}(r) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2r_0}\right)^{3/2}\left(\frac{r}{r_0}\right) e^{-r/2r_0}\,,
\end{aligned}
$$

con $r_0 = \hbar^2/(\mu e^2)$ e $\mu = m/2$. E' utile la relazione

$$\int_0^\infty dz\, z^n\, e^{-z} = n!$$

Esercizio 1.

L'Hamiltoniana, nel sistema di Gauss è

$$H_0 = \frac{1}{2m}\left(\bar{p} - \frac{e}{c}\bar{A}\right)^2 + \frac{|e|}{mc}\,\bar{S}\cdot\bar{B}$$

$$= \frac{1}{2m}\left[p_x^2 + \frac{e^2}{c^2}A_y^2\right] + \frac{|e|}{mc}\,\bar{S}\cdot\bar{B}$$

$$= \frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{e^2B^2}{2mc^2}x^2 + \frac{|e|}{mc}\,\bar{S}\cdot B$$

Si tratta di un oscillatore armonico unidimensionale con pulsazione $\omega = |e|B/mc$. Quindi

$$= \frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + \omega S_z$$

(a)

$$E = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) \pm \frac{\hbar\omega}{2} = \begin{cases} \hbar\omega(n+1) & S_z = +\frac{\hbar}{2} \\ \hbar\omega n & S_z = -\frac{\hbar}{2} \end{cases}$$

Quindi lo stato fondamentale ha energia $E=0$ ed è <u>NON</u> Degenere.
Gli stati eccitati hanno energia $E = \hbar\omega n$ $(n: 1\ldots\infty)$ e sono due volte degeneri

(b) Le matrici di Pauli sono hermitiane. Quindi

$$\frac{1}{\sqrt{2m}}\left(p_x\sigma_1 \pm m\omega x\sigma_2\right)^+ =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2m}}\left(p_x^+\sigma_1^+ \pm m\omega x^+\sigma_2^*\right) = \frac{1}{\sqrt{2m}}\left(p_x\sigma_1 \pm m\omega x\sigma_2\right)$$

Questo dimostra che Q_1 e Q_2 sono hermitiani

Calcoliamo ora

$$Q_1^2 = \frac{1}{2m}\left(p_x\sigma_1 + m\omega x\sigma_2\right)\left(p_x\sigma_1 + m\omega x\sigma_2\right)$$

Ricordiamo per le matrici di Pauli

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$$

Quindi $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1 \qquad \sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3 \qquad \sigma_2\sigma_1 = -i\sigma_3$

Segue

$$Q_1^2 = \frac{1}{2m}\left(p_x^2\sigma_1^2 + m^2\omega^2x^2\sigma_2^2 + m\omega x p_x \sigma_2\sigma_1 + m\omega p_x x \sigma_1\sigma_2\right)$$

$$= \frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + \frac{\omega}{2}\left(-ixp_x\sigma_3 + ip_x x\sigma_3\right)$$

$$= \frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 - \frac{i\omega}{2}\sigma_3[x, p_x]$$

$$= \frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + \frac{\hbar\omega}{2}\sigma_3 = \frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + \omega S_z$$

$$Q_2^2 = \frac{1}{2m}(p_x\sigma_2 - m\omega x\sigma_1)(p_x\sigma_2 - m\omega x\sigma_1)$$

$$= \frac{1}{2m}\left(p_x^2\sigma_2^2 + m^2\omega^2x^2\sigma_1^2 - m\omega p_x x\sigma_2\sigma_1 - m\omega x p_x\sigma_1\sigma_2\right)$$

$$= \frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + \frac{\omega}{2}\left(i\sigma_3 p_x x - i\sigma_3 x p_x\right)$$

$$= \frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 - \frac{i\omega}{2}\sigma_3[x, p_x] = H_0$$

Dato che, se $|E\rangle$ è un autostato di H_0, $E = \langle E|H_0|E\rangle$ abbiamo

$$E = \langle E|Q_1^2|E\rangle = \| Q_1|E\rangle \|^2 \geq 0$$

Domanda (c)

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}}\left[p_x\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + m\omega x\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{bmatrix}0 & p_x - im\omega x\\ p_x + im\omega x & 0\end{bmatrix} = \sqrt{\hbar\omega}\begin{pmatrix}0 & \eta\\ \eta^+ & 0\end{pmatrix}$$

$$Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}}\left[p_x\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} - m\omega x\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{pmatrix}0 & -ip_x - m\omega x\\ ip_x - m\omega x & 0\end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{\hbar\omega}\begin{pmatrix}0 & -i\eta\\ i\eta^+ & 0\end{pmatrix}$$

Quindi

$$\{Q_1, Q_2\} = \hbar\omega\begin{pmatrix}0 & \eta\\ \eta^+ & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\eta\\ i\eta^+ & 0\end{pmatrix} + \hbar\omega\begin{pmatrix}0 & -i\eta\\ i\eta^+ & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \eta\\ \eta^+ & 0\end{pmatrix}$$

$$= \hbar\omega\begin{pmatrix}i\eta\eta^+ & 0\\ 0 & -i\eta^+\eta\end{pmatrix} + \hbar\omega\begin{pmatrix}-i\eta\eta^+ & 0\\ 0 & i\eta^+\eta\end{pmatrix} = 0$$

Si poteva anche fare il calcolo utilizzando direttamente la definizione

$$\{Q_1, Q_2\} = \frac{1}{2m}(p_x\sigma_1 + m\omega x\sigma_2)(p_x\sigma_2 - m\omega x\sigma_1)$$

$$+ \frac{1}{2m}(p_x\sigma_2 - m\omega x\sigma_1)(p_x\sigma_1 + m\omega x\sigma_2)$$

$$= \frac{1}{2m}\Big(p_x^2\sigma_1\sigma_2 - m^2\omega^2 x^2\sigma_2\sigma_1 + \cancel{m\omega x p_x} - \cancel{m\omega p_x x}$$

$$+ p_x^2\sigma_2\sigma_1 - m^2\omega^2 x^2\sigma_1\sigma_2 - \cancel{m\omega x p_x} + \cancel{m\omega p_x x}\Big)$$

$$= \frac{1}{2m}\left(p_x^2 i\sigma_3 + m^2\omega^2 x^2 i\sigma_3 - p_x^2 i\sigma_3 - m^2\omega^2 x^2 i\sigma_3\right) = 0$$

Infine

$$[Q_1, H_0] = [Q_1, Q_1^2] = 0$$

$$[Q_2, H_0] = [Q_2, Q_2^2] = 0$$

Domanda d)

$$\bar{B} = \nabla \times A = \left(0, 0, \frac{\partial A_y}{\partial x}\right) = \left(0, 0, B(\cancel{2}-3\lambda x^2)\right)$$

Quindi

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{e^2}{2mc^2} B^2 x^2 (1-\lambda x^2)^2 + \frac{|e|}{mc} S_z B (1-3\lambda x^2)$$

$$= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 (1-2\lambda x^2) + \frac{|e|B}{mc} S_z (1-3\lambda x^2) + O(\lambda^2)$$

$$= H_0 - \lambda m\omega^2 x^4 - 3\lambda\omega S_z x^2 + O(\lambda^2)$$

Quindi $V = -m\omega^2 x^4 - 3\omega S_z x^2$

Lo stato fondamentale è $|n\, S_z\rangle = |0\, -\tfrac{1}{2}\rangle$

Quindi

$$E = E_0 + \lambda \langle 0 -\tfrac{1}{2} | V | 0 -\tfrac{1}{2}\rangle =$$

$$= \lambda \langle 0 -\tfrac{1}{2} | V | 0 -\tfrac{1}{2}\rangle$$

Ora

$$\langle 0 -\tfrac{1}{2} | V | 0 -\tfrac{1}{2}\rangle = \langle | -m\omega^2 x^4 - 3\omega S_z x^2 | \rangle$$

$$= \langle 0 | -m\omega^2 x^4 + \frac{3\hbar\omega}{2} x^2 | 0 \rangle$$

Ora

$$\langle 0 | x^2 | 0 \rangle = | x | 0\rangle |^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

$$\langle 0 | x^4 | 0 \rangle = | x^2 | 0\rangle |^2 = \frac{3\hbar^2}{4m^2\omega^2}$$

Quindi

$$\langle 0 | -m\omega^2 x^4 + \frac{3\hbar\omega}{2} x^2 | 0 \rangle = -m\omega^2 \frac{3\hbar^2}{4m^2\omega^2} + \frac{3\hbar\omega}{2} \cdot \frac{\hbar}{2m\omega} = 0$$

Il calcolo poteva anche essere fatto in rappresentazione di Schrödinger, usando $\psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\xi^2/2}$ $\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x$

Il valor medio diventa

$$\int dx \left(-m\omega^2 x^4 + \frac{3\hbar\omega}{2} x^2\right) |\psi_0|^2 =$$

$$= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \int d\xi \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \left[-m\omega^2 \frac{\hbar^2}{m^2\omega^2}\xi^4 + \frac{3\hbar\omega}{2}\frac{\hbar}{m\omega}\xi^2\right] e^{-\xi^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\hbar^2}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \left(-\xi^4 + \frac{3}{2}\xi^2\right) e^{-\cancel{\alpha}\xi^2}$$

Ora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, \xi^2 e^{-\xi^2} = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\int d\xi\, e^{-\xi^2\alpha}\Big|_{\alpha=1} = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{1/2}}\right)\Big|_{\alpha=1}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$ [formula del testo con $n=1$]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, \xi^4 e^{-\xi^2} = \left(-\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^2 \int d\xi\, e^{-\xi^2\alpha}\Big|_{\alpha=1} = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{1/2}}\right)_{\alpha=1}$$

$$= \sqrt{\pi}\,\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$ [formula del testo con $n=2$]

Quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \left(-\xi^4 + \frac{3}{2}\xi^2\right) = -\frac{3}{4}\sqrt{\pi} + \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0$$

Esercizio 2.

Introduciamo le variabili canoniche

$$r = \bar{r}_2 - \bar{r}_1 \quad , \quad p = \frac{1}{2}(\bar{p}_2 - p_1) \text{ e } \mu = \frac{m}{2} \text{ (massa ridotta)}$$

Inoltre riscriviamo

$$\frac{2\omega}{\hbar}(\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2) = \frac{\omega}{\hbar}\left(S^2 - S_1^2 - S_2^2\right) = \frac{\omega}{\hbar}\left(S^2 - \frac{3\hbar^2}{2}\right) \quad \bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2$$

Otteniamo la Hamiltoniana, nel CM,

$$H_0 = \frac{1}{2\mu}p^2 - \frac{e^2}{r} + \frac{\omega}{\hbar}\left(S^2 - \frac{3\hbar^2}{2}\right) + g_0 B S_z$$

Gli stati della Hamiltoniana spaziale sono $|n \ell m\rangle$ con energia

$$E_n = -\frac{E_I}{n^2} \qquad E_I = \frac{\mu e^4}{2\hbar^2}$$

Per definire lo spin notiamo che, sotto $\bar{r} \to -\bar{r}$, abbiamo

$$|n \ell m\rangle \longrightarrow (-1)^\ell |n \ell m\rangle$$

Quindi gli stati permessi in base al principio di Pauli sono

$$|n \ell m\rangle |S=0 \ S_z=0\rangle \qquad \ell \text{ pari}$$

$$|n \ell m\rangle |S=1 \ S_z=\left\{\begin{matrix}\pm 1\\ 0\end{matrix}\right\}\rangle \qquad \ell \text{ dispari}$$

Le corrispondenti energie sono

ℓ pari $\quad |n \ell m\rangle|S=0 \ S_z=0\rangle \quad E = -\dfrac{E_I}{n^2} - \dfrac{3}{2}\hbar\omega$

ℓ disp $\quad |n \ell m\rangle|S=1 \ S_z=\left\{\begin{matrix}\pm 1\\ 0\end{matrix}\right\}\rangle \quad E = -\dfrac{E_I}{n^2} + \dfrac{1}{2}\hbar\omega + g_0 B S_z$

Per calcolare i due livelli di energia più bassa come funzione di B identifichiamo i due stati con energia più bassa con $S=0$ $S=1$

$S=0$

$$\begin{array}{ll} n\ \ \ell\, m\ \ \ s\ s_z & \\ |1\ 0\ 0\rangle|0\ 0\rangle & E = E_A = -E_I - \frac{3}{2}\hbar\omega \quad \text{(non deg.)} \\ |2\ 0\ 0\rangle|0\ 0\rangle & E = E_B = -\frac{E_I}{4} - \frac{3}{2}\hbar\omega \quad \text{(non deg.)} \end{array}$$

$S=1$

$$|2\ 1\ m\rangle|1\ S_z\rangle \quad E = -\frac{E_I}{4} + \frac{\hbar\omega}{2} + gBS_z \quad \text{(ciascuno deg.=3)}$$

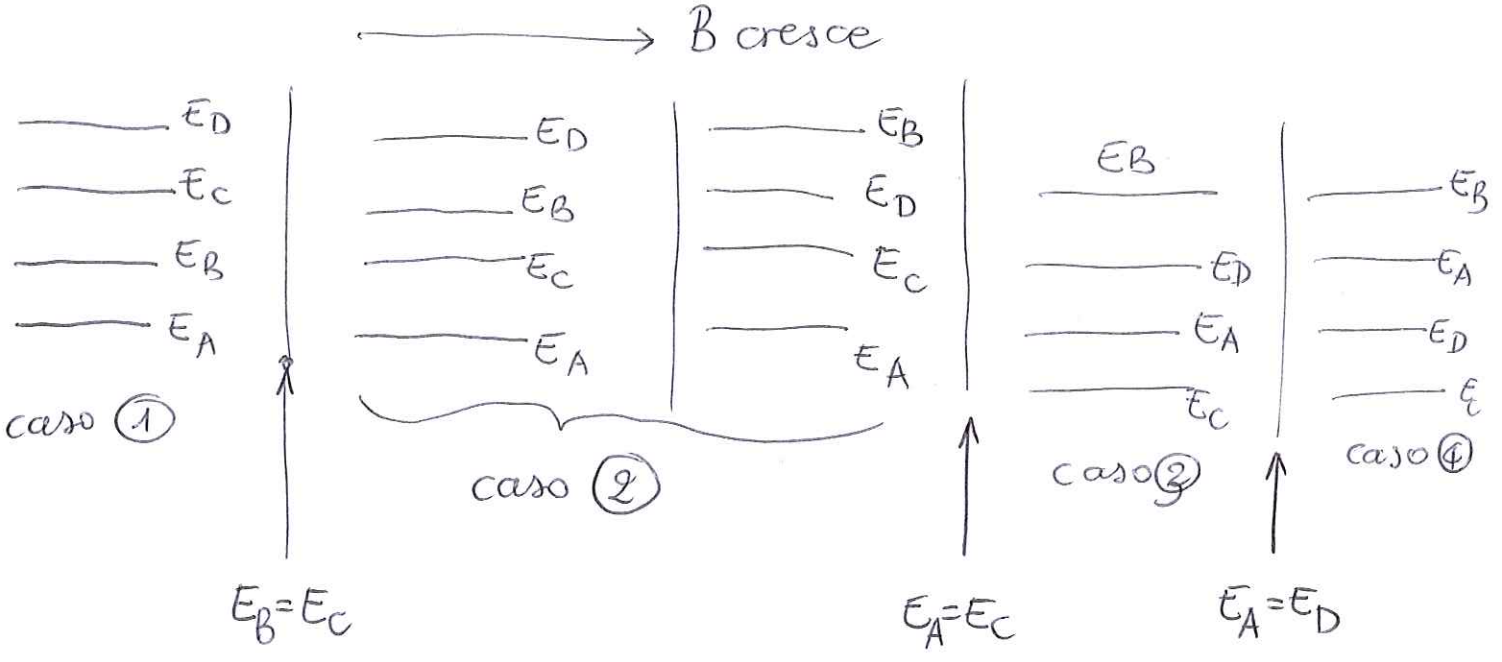
$$|3\ 1\ m\rangle|1\ S_z\rangle \quad E = -\frac{E_I}{9} + \frac{\hbar\omega}{2} + gBS_z \quad \text{(ciascun deg. 3)}$$

Tra questi stati gli unici che possono avere una energia inferiore a E_B, E_A sono quelli con $S_z = -\hbar$.
Quindi gli stati $S=1$ ~~sono~~ che sono rilevanti:

$$|2\ 1\ m\rangle|1\ -1\rangle \Rightarrow E = E_C = -\frac{E_I}{4} + \frac{\hbar\omega}{2} - \hbar g B$$

$$|3\ 1\ m\rangle|1\ -1\rangle \Rightarrow E = E_D = -\frac{E_I}{9} + \frac{\hbar\omega}{2} - \hbar g B$$

Grafico della posizione relativa dei quattro stati al crescere di B



caso ① : Vale per $E_B < E_C$

$$-\frac{E_I}{4} - \frac{3}{2}\hbar\omega < -\frac{E_I}{4} + \frac{\hbar\omega}{2} - \hbar g B \qquad \boxed{\hbar g B < 2\hbar\omega}$$

caso ② : Vale per $E_B > E_C$ $[\hbar g B > 2\hbar\omega]$ e $E_A < E_C$

$$-E_I - \frac{3}{2}\hbar\omega < -\frac{E_I}{4} + \frac{\hbar\omega}{2} - \hbar g B \qquad \hbar g B < \frac{3E_I}{4} + 2\hbar\omega$$

caso ③ : Vale per $E_A > E_C$ $\left[\hbar g B > \frac{3E_I}{4} + 2\hbar\omega\right]$ e $E_A < E_D$

$$-E_I - \frac{3}{2}\hbar\omega < -\frac{E_I}{9} + \frac{\hbar\omega}{2} - \hbar g B \qquad \hbar g B < \frac{8}{9}E_I + 2\hbar\omega$$

Quindi

① $0 < \hbar g B < 2\hbar\omega$ — SF $|1\,0\,0\rangle|0\,0\rangle$ non deg; Iecc $|2\,0\,0\rangle|0\,0\rangle$ non deg.

② $2\hbar\omega < \hbar g B < \frac{3E_I}{4} + 2\hbar\omega$ — SF $|1\,0\,0\rangle|0\,0\rangle$ non deg; Iecc $|2\,1\,m\rangle|1\,-1\rangle$ deg $= 3$

③ $\frac{3E_I}{4} + 2\hbar\omega < \hbar g B < \frac{8E_I}{9} + 2\hbar\omega$ — SF $|2\,1\,m\rangle|1\,-1\rangle$ deg $= 3$; Iecc $|1\,0\,0\rangle|0\,0\rangle$ non deg.

④ $\hbar g B > \frac{8E_I}{9} + 2\hbar\omega$ — SF $|2\,1\,m\rangle|1\,-1\rangle$ deg $= 3$; Iecc $|3\,1\,m\rangle|1\,-1\rangle$ deg $= 3$

b) Lo stato fondamentale è degenere (deg $= 3$) per

$$\hbar g B > \frac{3E_I}{4} + 2\hbar\omega$$

Per $\hbar g B = \frac{3E_I}{4} + 2\hbar\omega$ abbiamo $E_A = E_C$ e lo stato fondamentale è dato da

$$\begin{cases} |2\,1\,m\rangle|1\,-1\rangle \\ |1\,0\,0\rangle|0\,0\rangle \end{cases} \qquad \text{degenerazione } 4$$

Domanda c)

$$V = -\frac{1}{m^3c^2}(p^2)^2 \quad \text{dato che} \quad \bar{p} = \frac{1}{2}(\bar{p}_2 - \bar{p}_1)$$

Lo stato fondamentale è $|SF\rangle = |100\rangle|00\rangle$. Quindi

$$\langle SF|V|SF\rangle = \langle 100|V|100\rangle = -\frac{1}{m^3c^2}\,|p^2|100\rangle|^2$$

Ora

$$p^2|100\rangle = -\hbar^2\nabla^2\left(2r_0^{-3/2}e^{-r/r_0}Y_0^0\right) \quad \text{(data nel testo)}$$

$$= -2\hbar^2 r_0^{-3/2}Y_0^0\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(re^{-r/r_0})\right)$$

$$= -2\hbar^2 r_0^{-7/2}Y_0^0\,\frac{1}{r}(r-2r_0)e^{-r/r_0}$$

$$|p^2|100\rangle|^2 = \int r^2 dr\, d\Omega\; 4\hbar^2\frac{1}{r_0^7}|Y_0^0|^2\frac{1}{r^2}(r-2r_0)^2e^{-r/r_0}$$

$$= \frac{4\hbar^4}{r_0^7}\int_0^\infty dr\,(r-2r_0)^2e^{-2r/r_0} \qquad \frac{2r}{r_0} = x$$

$$= \frac{\hbar^4}{2r_0^4}\int_0^\infty dx\,(x-4)^2e^{-x} = \quad \text{(formula del testo)}$$

$$= \frac{\hbar^4}{2r_0^4}(2-8+16) = \frac{5\hbar^4}{r_0^4}$$

Quindi

$$E = -E_I - \frac{1}{m^3c^2}\frac{5\hbar^4}{r_0^4} = -E_I\left(1 + 5\frac{E_I}{mc^2}\right)$$

(a) Calcolo diretto di $\hat{p}^4$

Partiamo da

$$p^2|100\rangle = -2\hbar^2 r_0^{-7/2} Y_0^0 \frac{1}{r}(r-2r_0)e^{-r/r_0} = \tilde{\psi}(r)$$

Per piccoli r, $\tilde{\psi}(r)$ va come $1/r$ e quindi è necessario prestare attenzione nel calcolo del laplaciano

Infatti, se $f(r) = A/r$ per $r \to 0$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf) - 4\pi A \delta^{(3)}(\vec{r})$$

Quindi

$$p^2 f = -\frac{\hbar^2}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf) + 4\pi A \hbar^2 \delta^{(3)}(r)$$

Dato che $\lim_{r\to 0} r\tilde{\psi}(r) = 4\hbar^2 r_0^{-5/2} Y_0^0 = A$ abbiamo

$$(p^2)^2|100\rangle = 2\hbar^4 r_0^{-11/2} Y_0^0 \frac{1}{r}(r-4r_0)e^{-r/r_0} + \frac{16\pi\hbar^4}{r_0^{5/2}} Y_0^0 \delta^{(3)}(\vec{r})$$

Quindi, vi sono due contributi

$$\langle 100|(p^2)|100\rangle = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \int r^2 dr d\Omega\, 2\hbar^4 r_0^{-11/2} Y_0^0 \frac{1}{r}(r-4r_0)e^{-r/r_0} \times 2 r_0^{-3/2} e^{-r/r_0} Y_0^0 =$$

$$= 4\hbar^4 r_0^{-7} \int_0^\infty dr\, r(r-4r_0)e^{-2r/r_0} \qquad r = \frac{r_0}{2}x$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\hbar^4}{r_0^4}\int_0^\infty dx\, x(x-8)e^{-x} = -\frac{3\hbar^4}{r_0^4}$$

$$I_2 = \int d^3r \; \frac{16\pi\hbar^4}{r_0^{5/2}} Y_0^0 \, \delta^{(3)}(\vec{r}) \, 2 r_0^{-3/2} e^{-r/r_0} Y_0^0$$

$$= \frac{32\pi\hbar^4}{r_0^4} |Y_0^0|^2 = \frac{8\hbar^4}{r_0^4}$$

Sommando i due termini otteniamo

$$\langle 100|(p^2)^2|100\rangle = \frac{8\hbar^4}{r_0^4} - \frac{3\hbar^4}{r_0^4} = \frac{5\hbar^4}{r_0^4}$$

(b)

Si può pure utilizzare la relazione

$$H = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{e^2}{r} \implies p^2 = 2\mu\left(H + \frac{e^2}{r}\right)$$

$$\langle 100|(p^2)^2|100\rangle = 4\mu^2 \langle 100| H^2 + H\frac{e^2}{r} + \frac{e^2}{r}H + \frac{e^4}{r^2}|100\rangle$$

$$= 4\mu^2 \left[E_I^2 - 2E_I \langle 100|\frac{e^2}{r}|100\rangle + \langle 100|\frac{e^4}{r^2}|100\rangle \right]$$

Ora

$$\langle 100|\frac{e^2}{r}|100\rangle = \int dr\, r^2 d\Omega \, \frac{e^2}{r} 4 r_0^{-3} e^{-2r/r_0} |Y_0^0|^2$$

$$= 4e^2 r_0^{-3} \int dr\, r\, e^{-2r/r_0}$$

$$= e^2 r_0^{-1} \int_0^\infty dx\, x\, e^{-x} = \frac{e^2}{r_0}$$

$$\langle 100|\frac{e^4}{r^2}|100\rangle = \int dr\, r^2 d\Omega\, \frac{e^4}{r^2} 4 r_0^{-3} e^{-2r/r_0} |Y_0^0|^2$$

$$= 4e^4 r_0^{-3} \int dr\, e^{-2r/r_0}$$

$$= 2e^4 r_0^{-2} \int dx\, e^{-x} = 2e^4 r_0^{-2}$$

Quindi

$$\langle 100|(p^2)|100\rangle =$$

$$= 4\mu^2\left[E_I^2 - 2E_I\frac{e^2}{r_0} + \frac{e^2}{r_0^2}\right] \qquad \frac{e^2}{r_0} = 2E_I$$

$$= 4\mu^2\left[E_I^2 - 4E_I^2 + 8E_I^2\right]$$

$$= 5m^2 E_I^2$$ che è equivalente ai risultati precedenti

Esame di Meccanica Quantistica, 21/05/2020, Parte 1

Esercizio 1. Una particella di spin 1/2 vincolata a muoversi su una sfera di raggio unitario ha funzione d'onda

$$\psi = A \sin\theta \cos\phi \, (3\chi_+ + 4e^{i\alpha}\chi_-)$$

dove A è una costante di normalizzazione, α una fase costante, χ_+ e χ_- sono autostati di S_z, rispettivamente con autovalore $\pm\hbar/2$.

a) Se si effettua una misura di J^2, $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$, su ψ, quali valori si possono ottenere e con quale probabilità?

b) Si effettua una misura di L_z su ψ ottenendo $\hbar$ e, immediatamente dopo, una misura di J_z ottenendo $\hbar/2$. Si scriva la funzione d'onda normalizzata ψ_1 del sistema dopo le due misure.

c) Il sistema con funzione d'onda ψ_1 evolve con Hamiltoniana

$$H = \frac{\omega}{\hbar} J^2.$$

Si calcolino i valori misurabili di L_z al tempo t e le rispettive probabilità.

Esame di Meccanica Quantistica, 21/05/2020, parte 2

Esercizio 2. Una particella di massa m si muove in due dimensioni sotto l'azione del potenziale

$$V(x, y) = \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2 + \lambda xy).$$

a) Assumendo che λ sia piccolo, si calcoli l'energia dello stato fondamentale perturbativamente in λ.

b) Si calcoli l'energia del primo stato eccitato perturbativamente in λ.

c) Si effettui un cambio di coordinate corrispondente ad una rotazione di $\pi/4$. Si riscriva l'Hamiltoniana del sistema in termini della nuove coordinate.

d) Si utilizzi il risultato del punto c) per calcolare esattamente l'energia dello stato fondamentale e del primo stato eccitato. Si verifichi la correttezza dei risultati ottenuti ai punti a) e b), sviluppando il risultato esatto in serie di λ.

Esercizio 1

Riscriviamo la funzione d'onda in termini di

$$|l_z\ s_z\rangle = |l=1\ l_z;\ s=1/2\ s_z\rangle$$

$$\psi = \frac{A}{2}\left(\sin\theta e^{i\phi} + \sin\theta e^{-i\phi}\right)\left(3\chi_+ + 4e^{i\alpha}\chi_-\right)$$

$$= -\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\frac{A}{2}\left(Y_1^1 - Y_1^{-1}\right)\left(3\chi_+ + 4e^{i\alpha}\chi_-\right) \qquad a = -\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\frac{A}{2}$$

$$= a\left(3Y_1^1\chi_+ + 4e^{i\alpha}Y_1^1\chi_- - 3Y_1^{-1}\chi_+ - 4e^{i\alpha}Y_1^{-1}\chi_-\right)$$

$$= a\left(3|1\ \tfrac{1}{2}\rangle + 4e^{i\alpha}|1\ -\tfrac{1}{2}\rangle - 3|-1\ \tfrac{1}{2}\rangle - 4e^{i\alpha}|-1\ -\tfrac{1}{2}\rangle\right)$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1 \Rightarrow \qquad |a|^2(9+16+9+16) = |a|^2\cdot 50 = 1$$

$$a = \frac{1}{5\sqrt{2}} \quad \text{a meno di fase}$$

$$\psi = \frac{1}{5\sqrt{2}}\left(3|1\ \tfrac{1}{2}\rangle + 4e^{i\alpha}|1\ -\tfrac{1}{2}\rangle - 3|-1\ +\tfrac{1}{2}\rangle - 4e^{i\alpha}|-1\ -\tfrac{1}{2}\rangle\right)$$

(a) passiamo alla base $|j\ j_z\rangle_J$

$$\psi = \frac{3}{5\sqrt{2}}|\tfrac{3}{2}\ \tfrac{3}{2}\rangle_J$$
$$+\frac{4}{5\sqrt{2}}e^{i\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}|\tfrac{3}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle_J + \sqrt{\frac{2}{3}}|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle_J\right)$$
$$-\frac{3}{5\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}|\tfrac{3}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle_J - \sqrt{\frac{2}{3}}|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle_J\right)$$
$$-\frac{4e^{i\alpha}}{5\sqrt{2}}|\tfrac{3}{2}\ -\tfrac{3}{2}\rangle_J$$

$$P\left(J^2=\frac{15}{4}\hbar^2\right)=\left(\frac{3}{5\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{4}{5\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{3}{5\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{4}{5\sqrt{2}}\right)^2$$

$$=\frac{9}{50}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\frac{16}{50}\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$$

$$P\left(J^2=\frac{3}{4}\hbar^2\right)=\left(\frac{4}{5\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{2}{3}+\left(\frac{3}{5\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

(b)

$$\psi \xrightarrow[L_z=\hbar]{} a\left(3\left|1\ \tfrac{1}{2}\right\rangle+4e^{i\alpha}\left|1\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle\right)\xrightarrow[L_z+S_z=\frac{\hbar}{2}]{J_z=\frac{\hbar}{2}\ \text{equiv}}$$

$$\longrightarrow 4ae^{i\alpha}\left|1\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle \xrightarrow[\text{normalizzazione}]{} \left|1\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

$$\psi_1=\left|\underset{l_z}{1}\ \underset{s_z}{-\tfrac{1}{2}}\right\rangle$$

(c) Nella base $|J\ J_z\rangle_J$

$$\psi_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\tfrac{3}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle_J+\sqrt{\frac{2}{3}}\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle_J$$

$$E=\frac{15}{4}\hbar\omega \qquad\qquad E=\frac{3}{4}\hbar\omega$$

$$\psi_1(t)=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{15}{4}i\omega t}\left|\tfrac{3}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle_J+\sqrt{\frac{2}{3}}e^{-\frac{3}{4}i\omega t}\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle_J$$

(equiv a meno fase) $$=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-3i\omega t}\left|\tfrac{3}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle_J+\sqrt{\frac{2}{3}}\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle_J$$

Ritorniamo alla base $|l_z\ s_z\rangle$ ③

$$\psi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-3i\omega t}\left[\sqrt{\frac{2}{3}}\left|0\ \tfrac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\left|1\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle\right]$$

$$+\sqrt{\frac{2}{3}}\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\left|0\ \tfrac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left|1\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\left(e^{-3i\omega t}-1\right)\left|0\ \tfrac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{3}\left(e^{-3i\omega t}+2\right)\left|1\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

$$P(L_z = 0) = \frac{2}{9}\left|e^{-3i\omega t}-1\right|^2 = \frac{4}{9}(1-\cos 3\omega t)$$

$$P(L_z = \hbar) = \frac{1}{9}\left|e^{-3i\omega t}+2\right|^2 = \frac{1}{9}(5+4\cos 3\omega t)$$

ESERCIZIO 2

Prima di rispondere alle domande ricordiamo che

$$\langle 1|x|1\rangle = 0$$
$$\langle 0|x|0\rangle = 0$$

per l'oscillatore 1D

$$|\langle 1|x|0\rangle| = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

(a)

Lo stato fondamentale è $|n_x=0 \quad n_y=0\rangle$ con $E_{00} = \hbar\omega$

In teoria perturbativa

$$E = E_{00} + \langle 0\,0|\tfrac{1}{2}m\omega^2\lambda xy|0\,0\rangle$$
$$= E_{00} + \frac{1}{2}m\omega^2\lambda \underbrace{\langle 0|x|0\rangle}_{=0}\underbrace{\langle 0|y|0\rangle}_{=0} = \hbar\omega + O(\lambda^2)$$

(b) Il livello è degenere.

Base: $|n_x=1 \quad n_y=0\rangle, \; |n_x=0 \quad n_y=1\rangle$

Dobbiamo calcolare la restrizione di $V = \frac{1}{2}m\omega^2\lambda xy$ nel sottospazio

$$\langle 1\,0|V|1\,0\rangle = \frac{1}{2}m\omega^2\lambda \langle 1|x|1\rangle\langle 0|y|0\rangle = 0$$
$$\langle 0\,1|V|0\,1\rangle = \frac{1}{2}m\omega^2\lambda \langle 0|x|0\rangle\langle 1|y|1\rangle = 0$$

$$\langle 1\,0|V|0\,1\rangle = \frac{1}{2}m\omega^2\lambda \langle 1|x|0\rangle\langle 0|y|1\rangle =$$
$$= \frac{1}{2}m\omega^2\lambda \cdot \frac{\hbar}{2m\omega} = \frac{\lambda}{4}\hbar\omega$$

$$\langle 0\,1|V|1\,0\rangle = \langle 1\,0|V|0\,1\rangle^* = \frac{\lambda}{4}\hbar\omega$$

Dobbiamo calcolare gli autovalori di V (chiamati μ — λ è già usato come simbolo)

$$V = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda}{4}\hbar\omega \\ \frac{\lambda}{4}\hbar\omega & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(V - \mu I) = 0 \Rightarrow$$

$$\mu^2 - \left(\frac{\lambda}{4}\hbar\omega\right)^2 = 0 \qquad \mu = \pm\frac{\lambda}{4}\hbar\omega$$

Due livelli non degeneri con

$$E = \begin{cases} E_{10} + \frac{\lambda}{4}\hbar\omega = \left(2 + \frac{\lambda}{4}\right)\hbar\omega \\ E_{10} - \frac{\lambda}{4}\hbar\omega = \left(2 - \frac{\lambda}{4}\right)\hbar\omega \end{cases}$$

(c)

Definiamo

$$\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \\ Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y) \end{cases} \qquad \begin{cases} P_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_x + p_y) \\ P_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-p_x + p_y) \end{cases}$$

Trasf. canonica

$$\begin{cases} p^2 = p_x^2 + p_y^2 = P_x^2 + P_y^2 \\ x^2 + y^2 = X^2 + Y^2 \\ xy = \frac{1}{2}(X^2 - Y^2) \end{cases}$$

Quindi

$$H = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{m\omega^2}{2}\left(X^2 + Y^2 + \frac{\lambda}{2}(X^2 - Y^2)\right)$$

$$= \frac{1}{2m}P_x^2 + \frac{m\omega^2}{2}\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)X^2$$

$$+ \frac{1}{2m}P_y^2 + \frac{m\omega^2}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)Y^2$$

Definiamo $\Omega_1 = \omega\sqrt{1+\frac{\lambda}{2}}$

$\Omega_2 = \omega\sqrt{1-\frac{\lambda}{2}}$

$$H = \frac{1}{2m}P_x^2 + \frac{1}{2}m\Omega_1^2 X^2 \quad \longleftarrow \text{ oscill pulsaz. } \Omega_1$$
$$+ \frac{1}{2m}P_y^2 + \frac{1}{2}m\Omega_2^2 Y^2 \quad \longleftarrow \text{ oscill. pulsaz } \Omega_2$$

(d)

$$E_{n_1 n_2} = \hbar\Omega_1\left(n_1+\frac{1}{2}\right) + \hbar\Omega_2\left(n_2+\frac{1}{2}\right)$$

S.F. : $E = \hbar\Omega_1/2 + \hbar\Omega_2/2$

I ecc : $E = \hbar\Omega_1/2 + \hbar\Omega_2\cdot 3/2$

II ecc : $E = \hbar\Omega_1 3/2 + \hbar\Omega_2/2$

ordinamento corretto per λ piccolo (il II ecc. potrebbe non essere corretto)

Al primo ordine in λ : $\Omega_1 = \omega\left(1+\frac{\lambda}{4}\right)$

$\Omega_2 = \omega\left(1-\frac{\lambda}{4}\right)$

$$E_{SF} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(1+\frac{\lambda}{4}\right) + \frac{\hbar\omega}{2}\left(1-\frac{\lambda}{4}\right) = \hbar\omega + O(\lambda^2)$$

$$E_{I\,ecc} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(1+\frac{\lambda}{4}\right) + \frac{3\hbar\omega}{2}\left(1-\frac{\lambda}{4}\right) = 2\hbar\omega - \frac{\lambda}{4}\hbar\omega + O(\lambda^2)$$

$$E_{II\,ecc} = \frac{3\hbar\omega}{2}\left(1+\frac{\lambda}{4}\right) + \frac{\hbar\omega}{2}\left(1-\frac{\lambda}{4}\right) = 2\hbar\omega + \frac{\lambda}{4}\hbar\omega + O(\lambda^2)$$

Esame di Meccanica Quantistica, 30/06/2020

Esercizio 1. Due particelle identiche di spin 1/2 sono vincolate a muoversi su una retta ed interagiscono, nel sistema del centro di massa, con Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2\mu}p^2 + V(x_1 - x_2).$$

Il potenziale è quello di una buca infinita di larghezza a, ossia $V(x) = 0$ per $|x| < a/2$ e $V(x) = \infty$ per $|x| > a/2$. La massa ridotta del sistema è indicata con μ.
a) Nel sistema del centro di massa la funzione d'onda è data da

$$\psi_0 = \sin\frac{2\pi x}{a}\chi_1 + \cos\frac{\pi x}{a}\chi_2,$$

dove χ_1 e χ_2 sono funzioni d'onda di spin e $x = x_1 - x_2$ è la posizione relativa. Si determinino tutti gli stati ψ_0 tali che: a) una misura di S_z su ψ_0 dà 0 con probabilità 1, dove $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$ è lo spin totale del sistema; b) il valor medio della Hamiltoniana sullo stato vale $\hbar^2\pi^2/(\mu a^2)$.
Nel risultato, si esprimano χ_1 e χ_2 in termini delle autofunzioni $|SS_z\rangle$ di S^2 ed S_z e si normalizzi la funzione d'onda.
b) Si calcoli $\psi(t)$, lo stato in cui si trova il sistema al tempo t ($\psi(t = 0) = \psi_0$) ed il valor medio di S^2 sullo stato $\psi(t)$.

Esercizio 2. Si consideri una particella di spin 1/2 la cui dinamica è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = H_0 + V \qquad H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2} \qquad V = \frac{\omega}{2\hbar}\left(J^2 - L^2 - \frac{1}{2}\hbar J_z\right),$$

dove $\boldsymbol{L}$ è il momento angolare orbitale, $\boldsymbol{S}$ lo spin della particella e $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$ il momento angolare totale del sistema.

1. Determinare gli autovalori dell'Hamiltoniana e discutere la degenerazione dei primi tre livelli di energia.

2. Scrivere le autofunzioni corrispondenti ai livelli di cui al punto precedente che siano anche autofunzioni di H_0.

3. All'istante iniziale $t = 0$ lo stato del sistema è tale che una misura dell'energia fornisce con certezza il valore $E = \frac{7}{4}\hbar\omega$, e la probabilità che una misura di L^2 dia $2\hbar^2$ è 3/4. Determinare lo stato più generale compatibile con questa condizione.

4. All'istante iniziale viene misurato lo spin della particella lungo l'asse z e il risultato della misura fornisce $S_z = -\hbar/2$. Determinare lo stato della particella all'istante t generico.

ESERCIZIO 1

(a)

χ_1 e χ_2 sono funzioni dello spin. Scegliendo come base $|S\ S_z\rangle$, autofunzioni di S^2, S_z, $\bar{S} = \bar{S}_1 + S_2$

$$\chi_1, \chi_2 = a|1\ 1\rangle + b|1\ 0\rangle + c|1\ -1\rangle + d|0\ 0\rangle$$

non ci sono dato che si osserva sempre $S_z = 0$

Per Pauli χ_1 è pari sotto scambio $\Longrightarrow$ $S=1$

χ_2 è dispari sotto scambio $\Longrightarrow$ $S=0$

Ne segue $\chi_1 = b|1\ 0\rangle$ $\qquad$ $\chi_2 = d|0\ 0\rangle$

Quindi

$$\psi_0 = b \sin\frac{2\pi x}{a}|1\ 0\rangle + d\cos\frac{\pi x}{a}|0\ 0\rangle$$

Notiamo ora che $\psi_1 = \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\frac{\pi x}{a}$ è autof con $E_{buca} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2\mu a^2}$

$\psi_2 = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{2\pi x}{a}$ è autof. con $E_{buca} = \frac{2\hbar^2\pi^2}{\mu a^2}$

se $B = b\sqrt{\frac{a}{2}}$ $\qquad$ $A = d\sqrt{\frac{a}{2}}$

$$\psi_0 = B\psi_2|1\ 0\rangle + A\psi_1|0\ 0\rangle$$

Per fissare A, B:

$\langle\psi_0|\psi_0\rangle = 1$ $\qquad$ $|B|^2 + |A|^2 = 1$

$\langle\psi_0|H\psi_0\rangle = \frac{\hbar^2\pi^2}{\mu a^2}$ $\qquad$ $|B|^2\frac{2\hbar^2\pi^2}{\mu a^2} + |A|^2\frac{\hbar^2\pi^2}{2\mu a^2} = \frac{\hbar^2\pi^2}{\mu a^2}$

$$\begin{cases} |B|^2 + |A|^2 = 1 \\ 2|B|^2 + \frac{1}{2}|A|^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} |A|^2 = \frac{2}{3} \\ |B|^2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_2 |1\,0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} e^{i\phi} \psi_1 |0\,0\rangle \qquad \phi \text{ fase arbitraria}$$

(b)

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{it}{\hbar} E_{buca,2}\right) \psi_2 |1\,0\rangle$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{3}} \exp\left(-\frac{it}{\hbar} E_{buca,1}\right) e^{i\phi} \psi_1 |0\,0\rangle$$

(a meno di fase) $= \frac{1}{\sqrt{3}} \exp\Big(\underbrace{-\frac{it}{\hbar}(E_{b,2} - E_{b,1})}_{-\frac{it}{\hbar} \cdot \frac{3\hbar^2\pi^2}{2\mu a^2} = -i\omega t}\Big) \psi_2 |1\,0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} e^{i\phi} \psi_1 |0\,0\rangle$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-i\omega t} \psi_2 |1\,0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} e^{i\phi} \psi_1 |0\,0\rangle$$

$$\langle \psi(t) | S^2 | \psi(t) \rangle = \left| \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-i\omega t} \right|^2 2\hbar^2 = \frac{2}{3}\hbar^2$$

ESERCIZIO 2

Livelli di H_0

$n=0$ ——— $E=\frac{3}{2}\hbar\omega$ $\quad l=0$

$n=1$ ——— $E=\frac{5}{2}\hbar\omega$ $\quad l=1$

$n=2$ ——— $E=\frac{7}{2}\hbar\omega$ $\quad l=0,2$

$n=3$ ——— $E=\frac{9}{2}\hbar\omega$ $\quad l=1,3$

Autovalori dell' operatore V

Dato che $S=1/2$, j può assumere i valori $l\pm\frac{1}{2}$

caso (a) $\quad j=l+1/2$

$$V=\frac{\hbar\omega}{2}\left[\left(l+\frac{1}{2}\right)\left(l+\frac{3}{2}\right)-l(l+1)-\frac{J_z}{2}\right]=\frac{\hbar\omega}{2}\left(l+\frac{3}{4}-\frac{J_z}{2}\right)$$

Dato che $-l-1/2\leq J_z\leq l+\frac{1}{2}$, i possibili valori di V:

$$\frac{\hbar\omega}{4}(l+1)\ \ldots\ \frac{\hbar\omega}{4}(3l+2) \qquad \left[\Delta E=\frac{\hbar\omega}{4}\right]$$

$[J_z=l+\frac{1}{2}]$ $\qquad$ $[J_z=-l-\frac{1}{2}]$

caso (b) $\quad j=l-1/2$

$$V=\frac{\hbar\omega}{2}\left[\left(l-\frac{1}{2}\right)\left(l+\frac{1}{2}\right)-l(l+1)-\frac{J_z}{2}\right]=\frac{\hbar\omega}{2}\left(-l-\frac{1}{4}-\frac{J_z}{2}\right)$$

Dato che $-l+1/2\leq J_z\leq l-1/2$, i possibili valori sono:

$$-\frac{3}{4}\hbar\omega l,\ \ldots\ -\frac{\hbar\omega}{4}(l+1) \qquad \left[\Delta E=\frac{\hbar\omega}{4}\right]$$

$[J_z=l-1/2]$ $\qquad$ $[J_z=-l+\frac{1}{2}]$

④

Per ogni valore di n, il livello con energia minore si ottiene considerando $\ell = n$, $j = \ell - \frac{1}{2}$, $j_z = \ell - \frac{1}{2}$ (n deve essere diverso da 0)

$$E_{min}^{(n)} = \hbar\omega\left(n + \frac{3}{2}\right) - \frac{3}{4}\hbar\omega n = \hbar\omega\left(\frac{n}{4} + \frac{3}{2}\right) \qquad [*]$$

Per $n=0$ abbiamo solo $j = 1/2$ e quindi il minimo corrisponde a $[n=0, \ell=0, j=1/2, j_z = 1/2]$

$$E_{min}(n=0) = \hbar\omega\frac{3}{2} + \frac{\hbar\omega}{4} = \frac{7}{4}\hbar\omega$$

Da $(*)$

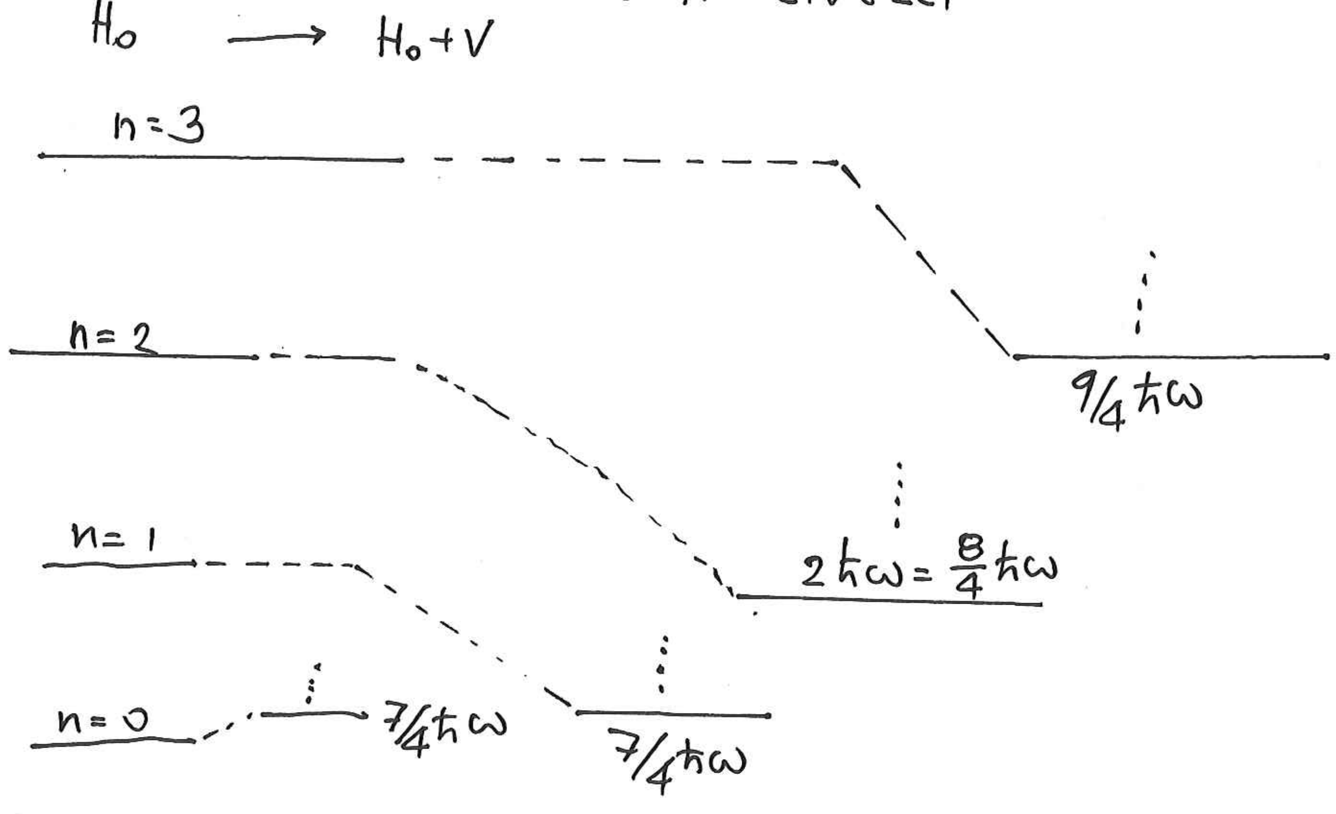
$$E_{min}(n=1) = \hbar\omega\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right) = \frac{7}{4}\hbar\omega$$

$$E_{min}(n=2) = \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = 2\hbar\omega \quad \left[\frac{8}{4}\hbar\omega\right]$$

$$E_{min}(n=3) = \hbar\omega\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}\hbar\omega$$

$$E_{min}(n=4) = \hbar\omega\left(1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}\hbar\omega$$

STRUTTURA LIVELLI



Dal grafico risulta chiaro che i 3 livelli più bassi corrispondono a [la spaziatura è $\frac{\hbar\omega}{4}$]

$$E_0 = \frac{7}{4}\hbar\omega \qquad E_1 = 2\hbar\omega \qquad E_2 = \frac{9}{4}\hbar\omega$$

Dobbiamo calcolare tutti gli ~~livelli~~ stati corrispondenti a queste energie.

$\boxed{n=0}$

due livelli
$l=0$
$J=1/2$

$J_z=-1/2$ $\quad E_0 + \frac{\hbar\omega}{2} = 2\hbar\omega$

$J_z=1/2$ $\quad E_0 + \frac{\hbar\omega}{4} = \frac{7}{4}\hbar\omega$

$\boxed{n=1}$

Qui $l=1$ i livelli con $J=3/2$ hanno energie

$E > E_0 = \frac{5}{2}\hbar\omega > \frac{9}{4}\hbar\omega$ non dobbiamo considerarli

due livelli con $J=1/2$

$l=1 \quad J=1/2$

$J_z=-1/2$ $\quad E_1 - \frac{1}{2}\hbar\omega = 2\hbar\omega$

$J_z=1/2$ $\quad E_1 - \frac{3}{4}\hbar\omega = 7/4\,\hbar\omega$

$\boxed{n=2}$

Qui
- $l=0$ e $J=1/2$ $\quad E > E_2 > \frac{9}{4}\hbar\omega$
- $l=2$ e $J=5/2$ $\quad E > E_2 > \frac{9}{4}\hbar\omega$

} non vanno considerati

- $l=2$ e $J=3/2$ questi vanno considerati

$l=2 \quad j=3/2$

J_z		
$-3/2$	$E_2 - \frac{3}{4}\hbar\omega$	$= \frac{11}{4}\hbar\omega$
$-1/2$	$E_2 - \hbar\omega$	$= 5/2\,\hbar\omega$
$1/2$	$E_2 - 5/4\,\hbar\omega$	$= 9/4\,\hbar\omega$
$3/2$	$E_2 - \frac{3}{2}\hbar\omega$	$= 2\hbar\omega$

$\boxed{n=3}$

Qui basta considerare lo stato di energia minima

$l=3 \quad j=5/2 \quad J_z=5/2 \qquad E=\frac{9}{4}\hbar\omega$

LIVELLI

S.F: $E=7/4\,\hbar\omega$
$$\begin{cases} |n=0 \quad l=0 \quad j=1/2 \quad J_z=1/2\rangle \\ |n=1 \quad l=1 \quad j=1/2 \quad J_z=1/2\rangle \end{cases} \qquad deg=2$$

I Ecc: $E=2\hbar\omega$
$$\begin{cases} |n=0 \quad l=0 \quad j=1/2 \quad J_z=-1/2\rangle \\ |n=1 \quad l=1 \quad j=1/2 \quad J_z=-1/2\rangle \\ |n=2 \quad l=2 \quad j=3/2 \quad J_z=3/2\rangle \end{cases} \qquad deg=3$$

II Ecc: $E=\frac{9}{4}\hbar\omega$
$$\begin{cases} |n=2 \quad l=2 \quad j=3/2 \quad J_z=1/2\rangle \\ |n=3 \quad l=3 \quad j=5/2 \quad J_z=5/2\rangle \end{cases} \qquad deg=2$$

DOMANDA 3)

$$\psi_0 = a\,|n=0\ \ l=0\ \ j=1/2\ \ j_z=1/2\rangle + b\,|n=1\ \ l=1\ \ j=1/2\ \ j_z=1/2\rangle$$

$P(L^2 = 2\hbar^2) = 3/4 \qquad |b|^2 = \frac{3}{4} \qquad b = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\phi}$

$\langle\psi_0|\psi_0\rangle = 1 \Rightarrow |a|^2 + |b|^2 = 1 \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$ (fissiamo la fase)

$$\psi_0 = \frac{1}{2}\,|n=0\ \ l=0\ \ j=1/2\ \ j_z=1/2\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\phi}\,|n=1\ \ l=1\ \ j=\tfrac{1}{2}\ \ j_z=1/2\rangle$$

DOMANDA 4)

Passiamo alla base $|n\ l\ l_z\ s_z\rangle_{LS}$

$$\psi_0 = \frac{1}{2}\,|0\ 0\ 0\ \tfrac{1}{2}\rangle_{LS} + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\phi}\left[\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|1\ 1\ 1\ -1/2\rangle_{LS} - \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|1\ 1\ 0\ \tfrac{1}{2}\rangle\right]$$

unico termine che sopravvive nella misura

$$\psi' = |1\ 1\ 1\ -1/2\rangle_{LS}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|n=1\ \ l=1\ \ j=3/2\ \ j_z=1/2\rangle + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|n=1\ \ l=1\ \ j=1/2\ \ j_z=1/2\rangle$$

$E_a = \frac{13}{4}\hbar\omega \qquad\qquad E_b = 7/4\,\hbar\omega$

$$\psi'(t) = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,e^{-iE_a t/\hbar}\,|1\ 1\ \tfrac{3}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle_J + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,e^{-iE_b t/\hbar}\,|1\ 1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle_J$$

equivalente $\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,e^{-i(E_a-E_b)t/\hbar}\,|1\ 1\ \tfrac{3}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle_J + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|1\ 1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle_J$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,e^{-3i\omega t/2}\,|1\ 1\ \tfrac{3}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle_J + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|1\ 1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle_J$$

Esame di Meccanica Quantistica, 15/07/2020

Esercizio 1. Una particella di massa m è vincolata a muoversi su un circonferenza di raggio a e non è soggetta a potenziali esterni.

a) Si calcolino i livelli di energia, la loro degenerazione e le autofunzioni normalizzate, come funzioni dell'angolo θ, dove θ è la posizione angolare della particella sulla circonferenza.

b) Sia ora ψ un'autofunzione dell'Hamiltoniana corrispondente al primo livello eccitato che è anche autofunzione di L_z con autovalore $\hbar$. Si definisca

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\theta) &= A\psi(\theta) \quad &\text{per } 0 \leq \theta \leq \pi, \\ \hat{\psi}(\theta) &= 0 \quad &\text{per } \pi \leq \theta \leq 2\pi, \end{aligned}$$

dove A è una costante (da calcolare) che rende $\hat{\psi}(\theta)$ normalizzata sulla circonferenza. Quale è la probabilità di misurare E_0, l'energia dello stato fondamentale determinata al punto a), su tale stato $\hat{\psi}$?

c) Viene aggiunta una perturbazione $V(\theta) = \lambda \sin\theta \cos\theta$. Si calcolino le energie dei primi tre stati al primo ordine in λ.

Può essere utile ricordare il laplaciano in coordinate cilindriche (r, θ, z):

$$\nabla^2 f(r,\theta,z) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \, .$$

Esercizio 2. Un sistema di due particelle identiche di massa m e spin 1 è descritto, nel sistema del centro di massa, dalla Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2 + \frac{\omega}{\hbar} J^2 \, ,$$

dove $\mu = m/2$ è la massa ridotta, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{p}$ è il corrispondente momento coniugato; $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{L}$ e $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$ sono rispettivamente il momento angolare totale, il momento angolare orbitale e lo spin totale.

a) Determinare gli autovalori corrispondenti ai primi tre livelli di energia e discuterne le relative degenerazioni. Determinare i corrispondenti autovettori ed esprimerli in termini di autofunzioni dell'oscillatore armonico tridimensionale e delle autofunzioni dello spin totale delle due particelle.

b) Calcolare al prim'ordine in teoria delle perturbazioni lo spostamento in energia dello stato fondamentale dovuto alla perturbazione

$$V = \lambda \left[(\boldsymbol{S}_1 - \boldsymbol{S}_2) \cdot \boldsymbol{r} \right]^2$$

ESERCIZIO 1

(a)

Il problema è bidimensionale con $r=a$, quindi

$$\nabla^2 f \to \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}$$

$$H\psi = E\psi \qquad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = E\psi$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \underbrace{\frac{2ma^2E}{\hbar^2}}_{=k^2}\psi = 0$$

$$\frac{\partial\psi^2}{\partial\theta^2} + k^2\psi = 0 \Rightarrow \quad \psi = Ae^{ik\theta} + Be^{-ik\theta}$$

Periodicità $k \in \mathbb{Z}$

Livelli

$$\frac{2ma^2E}{\hbar^2} = k^2 \qquad E = \frac{\hbar^2k^2}{2ma^2} \qquad k\in\mathbb{Z}$$

livello $k=0$ stato fondamentale non degenere
livelli $+|k|, -|k|$ stati degeneri (deg. 2)

autofunzioni $\psi_k(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ik\theta}$

Le funzioni sono normalizzate rispetto a

$$\langle\psi_a|\psi_b\rangle = \int d\theta\, \psi_a^*(\theta)\psi_b(\theta)$$

(b)

$$L_z\psi_k(\theta) = \hbar k\psi_k(\theta)$$

Quindi ~~uno~~ lo stato con $E = \frac{\hbar^2}{2ma^2}$ (primo livello eccitato)
e $L_z\psi = \hbar\psi$ è

$$\psi_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\theta}$$

$$\hat{\psi}_1 = \begin{cases} \dfrac{A}{\sqrt{2\pi}} e^{i\theta} & 0 \le \theta \le \pi \\ 0 & \pi \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

$$\langle \hat{\psi}_1 | \hat{\psi}_1 \rangle = \int_0^{2\pi} |\hat{\psi}_1|^2 d\theta = \frac{|A|^2}{2\pi} \int_0^{\pi} |e^{i\theta}|^2 d\theta = \frac{|A|^2}{2} \Rightarrow |A| = \sqrt{2}$$

Quindi, con opportuna scelta di fase

$$\hat{\psi}_1 = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{i\theta} & 0 \le \theta \le \pi \\ 0 & \pi \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

Lo stato fondamentale è $\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$$\text{Prob (misura } E_0 = 0) = |\langle \psi_0 | \hat{\psi}_1 \rangle|^2$$

$$= \left| \int_0^{\pi} d\theta \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{i\theta} \right|^2$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \left| \frac{1}{i} (e^{i\theta} - 1) \right|^2 = \frac{2}{\pi^2}$$

(c)

$$V(\theta) = \lambda \sin\theta \cos\theta = \frac{\lambda}{2} \sin 2\theta$$

(c1) correzioni allo stato fondamentale

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \qquad E = E_0 + \lambda \delta E$$

$$E_0 = 0$$

$$\lambda \delta E = \langle \psi_0 | V | \psi_0 \rangle = \frac{\lambda}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \, \frac{1}{2\pi} \sin 2\theta = 0$$

(c2) correzioni al I livello eccitato

Base ortonormale: $\psi_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\theta}$

$$\psi_{-1}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\theta}$$

$$\langle \psi_1 | V | \psi_1 \rangle = \frac{\lambda}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \, \frac{1}{2\pi} \sin 2\theta = 0$$

$$\langle \psi_{-1} | V | \psi_{-1} \rangle = \frac{\lambda}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \, \frac{1}{2\pi} \sin 2\theta = 0$$

$$\langle \psi_1 | V | \psi_{-1} \rangle = \frac{\lambda}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\theta} \sin 2\theta \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\theta}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \, e^{-2i\theta} \sin 2\theta =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \, \frac{1}{2i} e^{-2i\theta} \left(e^{2i\theta} - e^{-2i\theta} \right) =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{2i} \cdot 2\pi = -\frac{i\lambda}{4}$$

$$\langle \psi_{-1} | V | \psi_1 \rangle = \langle \psi_1 | V | \psi_{-1} \rangle^* = \frac{i\lambda}{4}$$

Rappresentando $|\psi_1\rangle = (1, 0)$, $|\psi_{-1}\rangle = (0, 1)$

$$\langle \psi | V | \psi \rangle = \begin{pmatrix} 0 & -i\lambda/4 \\ \frac{i\lambda}{4} & 0 \end{pmatrix}$$ autovalori $\pm \frac{\lambda}{4}$

livelli:

$$E_1 + \frac{\lambda}{4} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} + \frac{\lambda}{4}$$

$$E_1 - \frac{\lambda}{4} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} - \frac{\lambda}{4}$$

ESERCIZIO 2

LIVELLI OSCILLATORE 3D $\boxed{n = n_x + n_y + n_z}$

$n=0$ $E = \frac{3}{2}\hbar\omega$ $l=0$ pari (sotto scambio/parità)

$n=1$ $E = \frac{5}{2}\hbar\omega$ $l=1$ dispari (sotto scambio/parità)

$n=2$ $E = \frac{7}{2}\hbar\omega$ $l=0,2$ pari (sotto scambio/parità)

⋮

SPIN TOTALE:

due particelle di spin 1 $\longrightarrow$ $S_{tot} = $ 2, 0 } pari sotto scambio; 1 dispari sotto scambio

La funzione d'onda totale deve essere PARI (bosoni)

$n=0$ $l=0 \longrightarrow \begin{cases} S_{tot}=2 \longrightarrow J=2 & E = \frac{3}{2}\hbar\omega + 6\hbar\omega = \frac{15}{2}\hbar\omega \\ S_{tot}=0 \longrightarrow J=0 & \sim E = \frac{3}{2}\hbar\omega \end{cases}$

$n=1$ $l=1 \longrightarrow S_{tot}=1$:
- $J=2$ $E = 5/2\,\hbar\omega + 6\hbar\omega = \frac{17}{2}\hbar\omega$
- $J=1$ $E = 5/2\,\hbar\omega + 2\hbar\omega = \frac{9}{2}\hbar\omega$
- $J=0$ — $E = \frac{5}{2}\hbar\omega$

$n=2$:
- $l=0 \longrightarrow \begin{cases} S_{tot}=2 \longrightarrow J=2 & E = 7/2\,\hbar\omega + 6\hbar\omega = \frac{19}{2}\hbar\omega \\ S_{tot}=0 \longrightarrow J=0 & — E = 7/2\,\hbar\omega \end{cases}$
- $l=2$:
  - $S_{tot}=2$: $J=4$ … $J=0$
    - ⋮
    - $E = 7/2\,\hbar\omega + 2\hbar\omega = \frac{11}{2}\hbar\omega$
    - $E = 7/2\,\hbar\omega$
  - $S_{tot}=0 \longrightarrow J=2$ $E = \frac{7}{2}\hbar\omega + 6\hbar\omega = \frac{19}{2}\hbar\omega$

Gli stati con $n \geq 3$ hanno $E \geq \frac{9}{2}\hbar\omega$

I primi 3 livelli sono

$E = \frac{3}{2}\hbar\omega$ (a) $|n=0 \quad l=0 \quad S_{tot}=0 \quad J=0 \quad J_z=0\rangle$

non degenere

$E = \frac{5}{2}\hbar\omega$ (b) $|n=1 \quad l=1 \quad S_{tot}=1 \quad J=0 \quad J_z=0\rangle$

non degenere

$E = \frac{7}{2}\hbar\omega$ $\begin{cases} \text{(c)}\ |n=2 \quad l=0 \quad S_{tot}=0 \quad J=0 \quad J_z=0\rangle \\ \text{(d)}\ |n=2 \quad l=2 \quad S_{tot}=2 \quad J=0 \quad J_z=0\rangle \end{cases}$

degenerazione 2

Autofunzioni: indichiamo con $\psi_{nll_z}(\vec{r})$ le autofunz. dell'oscillatore armonico 3D

$E = \frac{3}{2}\hbar\omega$ (a) $\psi_{000}(\vec{r})\,|\overset{S_{tot}}{0}\ \overset{S_{tot,z}}{0}\rangle$

$\boxed{CG\ 1\times 1 \rightarrow \overset{J}{0}\ \overset{J_z}{0}}$

$E = \frac{5}{2}\hbar\omega$ (b) $\sqrt{\frac{1}{3}}\left[\psi_{111}(\vec{r})\,|\overset{S_{tot}}{1}\ \overset{S_{tot,z}}{-1}\rangle - \psi_{110}(\vec{r})\,|1\ 0\rangle + \psi_{11-1}(\vec{r})\,|1\ 1\rangle\right]$

$\boxed{CG\ 2\times 2 \rightarrow \overset{J}{0}\ \overset{J_z}{0}}$

$E = \frac{7}{2}\hbar\omega$ $\begin{cases} \text{(c)}\ \psi_{200}(\vec{r})\,|0\ 0\rangle \\ \text{(d)}\ \sqrt{\frac{1}{5}}\Big[\psi_{222}(\vec{r})\,|2\ -2\rangle - \psi_{22+1}(r)\,|2\ -1\rangle + \\ \qquad \psi_{220}(\vec{r})\,|2\ 0\rangle - \psi_{22-1}(r)\,|2\ 1\rangle \\ \qquad \psi_{22-2}(\vec{r})\,|2\ 2\rangle\Big] \end{cases}$

b)

Lo stato fondamentale è

$$\psi_{SF} = \underset{n_x\ n_y\ n_z}{|0\,0\,0\rangle}\ \underset{S_{tot}\ S_{tot,z}}{|0\,0\rangle}$$

$$\langle \psi_{SF} | \lambda [(\bar{S}_1 - \bar{S}_2)\cdot \vec{r}]^2 | \psi_{SF} \rangle = \qquad \vec{S}_{12} = \bar{S}_1 - \bar{S}_2$$

$$= \lambda \langle \psi_{SF} | (S_{12x}\, x + S_{12y}\, y + S_{12z}\, z)^2 | \psi_{SF} \rangle$$

$$= \lambda \langle \psi_{SF} | (S_{12x}^2 x^2 + S_{12y}^2 y^2 + S_{12z}^2 z^2 +$$

$$2 S_{12x} S_{12y}\, xy + 2 S_{12x} S_{12z}\, xz + 2 S_{12y} S_{12z}\, yz) | \psi_{SF} \rangle$$

Ora

$$\langle 000 | x^2 | 000 \rangle = \langle 0 | x^2 | 0 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

$$\langle 000 | y^2 | 000 \rangle = \langle 0 | y^2 | 0 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

$$\langle 000 | z^2 | 000 \rangle = \langle 0 | z^2 | 0 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

$$\langle 000 | xy | 000 \rangle = \langle 0 | x | 0 \rangle \langle 0 | y | 0 \rangle = 0$$

$$\langle 000 | xz | 000 \rangle = \langle 0 | x | 0 \rangle \langle 0 | z | 0 \rangle = 0$$

$$\langle 000 | yz | 000 \rangle = \langle 0 | y | 0 \rangle \langle 0 | z | 0 \rangle = 0$$

Quindi

$$\langle \psi_{SF} | V | \psi_{SF} \rangle = \lambda \frac{\hbar}{2m\omega} \underset{S_{tot}\ S_{tot,z}}{\langle 0\, 0 |}\ \underbrace{S_{12x}^2 + S_{12y}^2 + S_{12z}^2}_{S_{12}^2} | 0\, 0 \rangle$$

$$\text{Ora} \quad S_{12}^2 = (S_1 - S_2)^2 = S_1^2 + S_2^2 - 2 \bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2$$

$$= S_1^2 + S_2^2 - [S_{tot}^2 - S_1^2 - S_2^2] = 2 S_1^2 + 2 S_2^2 - S_{tot}^2$$

$$= 8\hbar^2 - S_{tot}^2$$

$$\langle \psi_{SF} | V | \psi_{SF} \rangle = \lambda \frac{\hbar}{2m\omega} \langle 0\,0 | (8\hbar^2 - S_{tot}^2) | 0\,0 \rangle$$

$$= \lambda \frac{\hbar}{2m\omega} \cdot 8\hbar^2 = \lambda \frac{4\hbar^3}{m\omega}$$

Esame di Meccanica Quantistica, 14/09/2020

Esercizio 1. Si consideri un sistema bidimensionale con Hamiltoniana

$$H = H_0 + \lambda H_1$$

con

$$H_0 = \hbar\omega(a_x^+ a_x + a_y^+ a_y) \qquad H_1 = \hbar\omega(a_x^+ a_y + a_y^+ a_x),$$

dove

$$a_x = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega x + ip_x) \qquad a_y = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega y + ip_y).$$

a) Si calcolino le energie dei primi tre livelli di H al primo ordine in λ ($|\lambda| \ll 1$).

b) Si calcoli $[H_0, H_1]$. Alla luce di questo risultato si spieghi perchè il risultato ottenuto in a) è esatto.

c) Si calcolino le autofunzioni dei primi tre livelli di H nella base ortonormale $|n,m\rangle = C_{nm}(a_x^+)^n(a_y^+)^n|0\rangle$, dove C_{nm} è una costante di normalizzazione positiva.

d) Si calcoli l'evoluto $|\psi(t)\rangle$ sotto l'azione di H assumendo $|\psi(0)\rangle = |1,0\rangle$; si calcoli il valor medio $\langle\psi(t)|x^2|\psi(t)\rangle$.

Esercizio 2. Si considerino due particelle identiche di spin 1/2 e massa m che interagiscono nel sistema del centro di massa con Hamiltoniana

$$H_0 = \frac{p^2}{m} + \frac{1}{4}m\omega^2 r^2 + 2\frac{A}{\hbar^2}\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}$$

dove $\boldsymbol{r}$ è la posizione relativa, $\boldsymbol{p}$ il relativo momento coniugato, $\boldsymbol{L}$ il momento angolare orbitale e $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$ lo spin totale. Si assuma $-\frac{1}{2}\hbar\omega < A < \frac{1}{4}\hbar\omega$.

a) Si calcolino l'energia dello stato fondamentale e del primo stato eccitato e la loro degenerazione.

b) Si consideri $H = H_0 + V$ con $V = \lambda(L_z + 2S_z)$ e si assuma $0 < A < \frac{1}{4}\hbar\omega$. Si calcoli l'energia dello stato fondamentale e del primo stato eccitato di H al primo ordine in λ.

ESERCIZIO 1

(a)

Ricordiamo che, per l'oscillatore 1D, vale

$$H_{osc} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$$

Ne segue

$$H_0 = \hbar\omega\, a_x^\dagger a_x + \hbar\omega\, a_y^\dagger a_y$$

$$= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 y^2 - \frac{\hbar\omega}{2}$$

$$= H_{osc.\,2D} - \hbar\omega$$

SPETTRO DI H_0 : $E_n = E_n(\text{oscillatore arm } 2D) - \hbar\omega$

$$= \hbar\omega(n+1) - \hbar\omega = \hbar\omega n$$

S.F. : $n=0$ $E=0$ n.d.

I ecc. $n=1$ $E=\hbar\omega$ deg $=2$

II ecc $n=2$ $E=2\hbar\omega$ deg $=3$

Svolgiamo ora la teoria perturbativa

(a) lo stato fond. di H_0 non è degenere con funzione d'onda $|0\,0\rangle$ $(a_x|00\rangle = a_y|00\rangle = 0)$

$$\Delta E = \langle 0\,0|H_1|0\,0\rangle$$

$$= \hbar\omega\langle 00|a_x^\dagger a_y + a_y^\dagger a_x|00\rangle = 0$$

Quindi lo stato fondamentale di H ha energia

$$E = 0 + O(\lambda^2)$$

(b) Il primo stato eccitato di H_0 ha degenerazione 2 con base $|1\,0\rangle$ e $|0\,1\rangle$

Dobbiamo calcolare $\langle 1\,0|H_1|1\,0\rangle$

$\langle 1\,0|H_1|0\,1\rangle$ e $\langle 0\,1|H_1|1\,0\rangle$

$\langle 0\,1|H_1|0\,1\rangle$

i) $\langle 1\,0|H_1|1\,0\rangle =$

$\hbar\omega \langle 1\,0| a_x^\dagger a_y + a_y^\dagger a_x |1\,0\rangle =$

$= \hbar\omega \left[\langle 1\,0|a_x^\dagger a_y|1\,0\rangle + \langle 1\,0|a_y^\dagger a_x|1\,0\rangle \right]$

$= \hbar\omega \left[\underbrace{\langle 1|a_x^\dagger|1\rangle}_{=0} \underbrace{\langle 0|a_y|0\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle 1|a_y^\dagger|1\rangle}_{=0} \underbrace{\langle 0|a_x|0\rangle}_{=0} \right] = 0$

ii)

$\langle 0\,1|H_1|0\,1\rangle = 0$ (calcolo analogo al precedente)

iii)

$\langle 1\,0|H_1|0\,1\rangle = \hbar\omega \left[\langle 1\,0|a_x^\dagger a_y|0\,1\rangle + \langle 1\,0|a_y^\dagger a_x|0\,1\rangle \right]$

$\hbar\omega \left[\underbrace{\langle 1|a_x^\dagger|0\rangle}_{=1} \underbrace{\langle 0|a_y|1\rangle}_{=1} + \underbrace{\langle 1|a_x|0\rangle}_{=0} \underbrace{\langle 0|a_y^\dagger|1\rangle}_{=0} \right] = \hbar\omega$

$\langle 0\,1|H_1|1\,0\rangle = \langle 1\,0|H_1|0\,1\rangle^* = \hbar\omega$

Rappresentiamo $|1\,0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $|0\,1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ per cui

$$\langle\ H_1\ \rangle = \begin{pmatrix} 0 & \hbar\omega \\ \hbar\omega & 0 \end{pmatrix}$$

Autovalori $\det \begin{pmatrix} -\mu & \hbar\omega \\ \hbar\omega & -\mu \end{pmatrix} = \mu^2 - (\hbar\omega)^2 \Longrightarrow \mu = \pm \hbar\omega$

Quindi, al primo ordine in λ

SF $\quad E = 0$

I ecc $\quad E = \hbar\omega(1-\lambda)$

II ecc $\quad E = \hbar\omega(1+\lambda)$

b)

$$[H_0, H_1]\frac{1}{(\hbar\omega)^2} = [a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y, a_x^\dagger a_y + a_y^\dagger a_x] =$$

$$= [a_x^\dagger a_x, a_x^\dagger a_y] + (a_x^\dagger a_x, a_y^\dagger a_x)$$

$$+ [a_y^\dagger a_y, a_x^\dagger a_y] + [a_y^\dagger a_y, a_y^\dagger a_x]$$

$$= a_x^\dagger [a_x, a_x^\dagger] a_y + a_y^\dagger [a_x^\dagger, a_x] a_x +$$

$$+ a_x^\dagger [a_y^\dagger, a_y] a_y + a_y^\dagger [a_y, a_y^\dagger] a_x =$$

$$= a_x^* a_y - a_y^\dagger a_x - a_x^\dagger a_y + a_y^\dagger a_x = 0$$

Quindi esiste una base comune di autovettori di H_0 e H_1.
La teoria delle perturbazioni lavora esattamente in questo modo, identificando in ogni autospazio di H_0 gli autovettori di H_1. Il risultato è quindi esatto

c)
L'autofunzione dello stato fondamentale è $|00\rangle$
Per il calcolo delle autofunzioni dei due stati eccitati dobbiamo calcolare gli autovettori di

$$\langle H_1 \rangle = \begin{pmatrix} 0 & \hbar\omega \\ \hbar\omega & 0 \end{pmatrix}$$

<u>I ecc</u> $\quad E_I = \hbar\omega(1-\lambda) \qquad |I\,ecc\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|10\rangle - |01\rangle\right)$

<u>II ecc</u> $\quad E_{II} = \hbar\omega(1+\lambda) \qquad |II\,ecc\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|10\rangle + |01\rangle\right)$

(d)

$$|1\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|I\,ecc\rangle + |II\,ecc\rangle\right)$$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-iE_I t/\hbar}|I\,ecc\rangle + e^{-iE_{II} t/\hbar}|II\,ecc\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{\cancel{e^{-iE_{II}t/\hbar}}}_{\text{(eliminabile)}}\left(e^{i(E_{II}-E_I)t/\hbar}|I\,ecc\rangle + |II\,ecc\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{2i\lambda\omega t}|I\,ecc\rangle + |II\,ecc\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{2i\lambda\omega t}(|1\,0\rangle - |0\,1\rangle) + |1\,0\rangle + |0\,1\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}(e^{2i\lambda\omega t}+1)|1\,0\rangle + \frac{1}{2}(1-e^{2i\lambda\omega t})|0\,1\rangle$$

Per calcolare $\langle\psi(t)|x^2|\psi(t)\rangle = |x|\psi(t)\rangle|^2$ calcoliamo

$$x|1\,0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_x + a_x^\dagger)|1\,0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(|0\,0\rangle + \sqrt{2}|2\,0\rangle\right)$$

$$x|0\,1\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_x + a_x^\dagger)|0\,1\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}|1\,1\rangle$$

$$x|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\Big[(e^{2i\lambda\omega t}+1)|0\,0\rangle + \sqrt{2}(e^{2i\lambda\omega t}+1)|2\,0\rangle + (1-e^{2i\lambda\omega t})|1\,1\rangle\Big]$$

$$\langle\psi t|x^2|\psi(t)\rangle = \frac{\hbar}{8m\omega}\left[|e^{2i\lambda\omega t}+1|^2 + 2|e^{2i\lambda\omega t}+1|^2 + |1-e^{2i\lambda\omega t}|^2\right]$$

$$= \frac{\hbar}{8m\omega}\left[3|e^{2i\lambda\omega t}+1|^2 + |1-e^{2i\lambda\omega t}|^2\right]$$

$$= \frac{\hbar}{8m\omega}\left[3\cdot 2(1+\cos(2\lambda\omega t)) + 2(1-\cos(2\lambda\omega t))\right]$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}(2+\cos(2\lambda\omega t))$$

ESERCIZIO 2

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2 + \frac{A}{\hbar^2}(J^2 - L^2 - S^2)$$

dove abbiamo introdotto la massa ridotta $\mu = \frac{m}{2}$ e $\bar{J} = \bar{L} + \bar{S}$.

Livelli

$n=0$ —— $L=0$, per Pauli $S=0$, quindi $J=0$

$n=1$ —— $L=1$, $L_z = \pm 1, 0$, per Pauli $S=1$, $S_z = \pm 1, 0$, quindi $J = \begin{cases} J=2 \\ J=1 \\ J=0 \end{cases}$

Energie

(a) $|n=0 \quad L=0 \quad S=0 \quad J=0 \quad J_z=0\rangle \qquad E = \frac{3}{2}\hbar\omega$

(b)

$|n=1 \quad L=1 \quad S=1 \quad J=2 \quad J_z = \pm 2, \pm 1, 0\rangle \qquad E = \frac{5}{2}\hbar\omega + A(6-2-2) = \frac{5}{2}\hbar\omega + 2A$

$|n=1 \quad L=1 \quad S=1 \quad J=1 \quad J_z = \pm 1, 0\rangle \qquad E = \frac{5}{2}\hbar\omega + A(2-2-2) = \frac{5}{2}\hbar\omega - 2A$

$|n=1 \quad L=1 \quad S=1 \quad J=0 \quad J_z = 0\rangle \qquad E = \frac{5}{2}\hbar\omega + A(0-2-2) = \frac{5}{2}\hbar\omega - 4A$

Quindi per $0 < A < \frac{\hbar\omega}{4}$

SF: $E = \frac{3}{2}\hbar\omega$ $\qquad$ I ecc.: $E = \frac{5}{2}\hbar\omega - 4A$ non deg.

per $A = 0$

$E = \frac{3}{2}\hbar\omega$ $\qquad$ I ecc: $E = \frac{5}{2}\hbar\omega$ $\qquad$ deg 9

per $-\frac{\hbar\omega}{2} < A < 0$

$E = \frac{3}{2}\hbar\omega$ $\qquad$ I ecc $E = \frac{5}{2}\hbar\omega - 2|A|$ deg. 5

b)

Teoria perturbativa sul ~~stato~~ fond.

$$\Delta E = \lambda \langle n=0\ l=0\ S=0\ J=0\ J_z=0 | L_z + 2S_z | n=0\ l=0\ S=0\ J=0\ J_z=0 \rangle$$
$$= 0$$

Sul primo eccitato

$$|n=1\ l=1\ S=1\ J=0\ J_z=0\rangle = \quad (\text{scriviamo solo } |L_z\ S_z\rangle_{LS})$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|1\ -1\rangle - |0\ 0\rangle + |-1\ 1\rangle\right) \quad \left(\text{dalle tavole CG per } 1\times 1\right)$$

Quindi

$$\Delta E = \lambda \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\langle 1\ -1| - \langle 0\ 0| + \langle -1\ 1|\right)\right)\left(L_z + 2S_z\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left(|1\ -1\rangle - |0\ 0\rangle + |-1\ 1\rangle\right)\right) =$$
$$= \lambda \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\langle 1\ -1| - \langle 0\ 0| + \langle -1\ 1|\right) \cdot \frac{\hbar}{\sqrt{3}}\left(-|1\ -1\rangle + |-1\ 1\rangle\right)\right]$$
$$= \frac{\lambda\hbar}{3}\left(-1+1\right) = 0$$

Al primo ordine in λ la perturbazione non cambia le energie.

Esame di Meccanica Quantistica, 19/11/2020

Esercizio 1. Si considerino due particelle distinguibili, entrambe di massa m, che interagiscono con potenziale $V(r) = -\alpha/r$, $\alpha > 0$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$.

a) Si scriva l'Hamiltoniana H_0 nel sistema del centro di massa in termini di $\boldsymbol{r}$ e del corrispondente impulso coniugato $\boldsymbol{p}$. Si calcolino le energie E_1 ed E_2 dello stato fondamentale e del primo stato eccitato e le rispettive degenerazioni. Si supponga che le due particelle non abbiano spin.

b) Se $|\psi_0\rangle$ è la funzione d'onda dello stato fondamentale di H_0, si calcoli $\langle\psi_0|r|\psi_0\rangle$.

c) Si supponga ora che le due particelle abbiano entrambe spin 1/2 e che interagiscano con Hamiltoniana

$$H = H_0 + H_S, \quad H_S = \frac{A}{\hbar^2}\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2 + \frac{B}{\hbar}(S_{1z} - S_{2z})$$

con $0 < A < \Delta/2$, $B = 2A/3$, $\Delta = E_2 - E_1$. Si calcolino le energie dei primi tre livelli del sistema con le rispettive degenerazioni. Suggerimento: Si calcolino gli elementi di matrice di H_S nella base dei ket $|S_t S_{t,z}\rangle$, autofunzioni di S_t^2 ed $S_{t,z}$ con $\boldsymbol{S}_t = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$, e si diagonalizzi la corrispondente matrice 4×4. Si spieghi perchè questo calcolo fornisce la risposta alla domanda.

d) Si supponga che il sistema sia nello stato fondamentale di H. Facendo una misura di S_t^2, quali valori si possono ottenere e con quale probabilità?

Esercizio 2. Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale di massa m, pulsazione ω e Hamiltoniana $\hat{H}_0$. Al tempo $t = 0$ lo stato del sistema è descritto dalla seguente funzione d'onda normalizzata:

$$\langle x|\alpha\rangle = \psi_\alpha(x) = \frac{\mathcal{N}}{x_0^{1/2}\pi^{1/4}}\left(2 + (1+i)\xi\right)e^{-\xi^2/2} \tag{1}$$

dove $x_0 \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$, $\xi \equiv \frac{x}{x_0}$ e $\mathcal{N}$ è una costante di normalizzazione.

Si determinino:

a) i valori che si possono ottenere facendo una misura dell'energia e le relative probabilità;

b) i valor medi degli operatori $\hat{x}, \hat{p}$ e dell'operatore parità $\hat{\Pi}$ al variare del tempo.

All'istante $t = 2\pi/\omega$ il sistema viene perturbato in maniera anarmonica. La perturbazione è descritta dalla seguente hamiltoniana

$$\delta\hat{H} = \lambda\,\frac{\hbar\omega}{x_0^3}\,\hat{x}^3, \tag{2}$$

dove λ un parametro adimensionale tale che $\lambda \ll 1$. Si calcolino:

c) gli autovalori dell'hamiltoniana $\hat{H} = \hat{H}_0 + \delta\hat{H}$ al primo ordine in λ;

d) il valore medio di $\hat{H}$ sull'evoluto di $\psi_\alpha(x)$ un istante dopo l'introduzione della perturbazione.

Polinomi di Hermite:

$$\begin{aligned} H_0(\xi) &= 1, \\ H_1(\xi) &= 2\xi, \\ H_2(\xi) &= 4\xi^2 - 2, \\ H_3(\xi) &= 8\xi^3 - 12\xi\ . \end{aligned}$$

Esercizio 1

(a) Se $\mu = m/2$ è la massa ridotta

$$H_0 = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{\alpha}{r}$$ (Hamiltoniana problema Coulombiano "atomo di idrogeno")

Definito $a_0 = \frac{\hbar^2}{\mu\alpha}$ i livelli energetici sono $E_n = -\frac{\alpha}{2a_0}\frac{1}{n^2}$

Quindi

$$E_0 = -\frac{\alpha}{2a_0}$$ deg. 1 stato fond.

$$E_1 = -\frac{\alpha}{8a_0}$$ deg. 4 (3 livelli $L=1$, 1 livello $L=0$)

(b)

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}$$ (autof stato fondamentale atomo di idrogeno)

$$\langle\psi_0|r|\psi_0\rangle = \int d^3r \, r \, |\psi_0(r)|^2$$

$$= \frac{1}{\pi a_0^3}\int r^2 dr \, d\Omega \, r \, e^{-2r/a_0}$$

$$= \frac{4\pi}{\pi a_0^3}\int_0^\infty dr \, r^3 e^{-2r/a_0}$$

$$\int_0^\infty dr \, r^3 e^{-\beta r} = -\frac{d^3}{d\beta^3}\int_0^\infty dr \, e^{-\beta r} = -\frac{d^3}{d\beta^3}\frac{1}{\beta} = \frac{6}{\beta^4}$$

$$\langle\psi_0|r|\psi_0\rangle = \frac{4}{a_0^3}\cdot 6\left(\frac{a_0}{2}\right)^4 = \frac{3}{2}a_0 \qquad \left[\beta = \frac{2}{a_0}\right]$$

(c)

$$H_S = \frac{A}{2\hbar^2}\left(S_t^2 - S_1^2 - S_2^2\right) + \frac{B}{\hbar}(S_{1z} - S_{2z})$$

$$= \frac{A}{2\hbar^2}\left(S_t^2 - \frac{3}{2}\hbar^2\right) + \frac{B}{\hbar}(S_{1z} - S_{2z}) = \frac{A}{4\hbar^2}\left(2S_t^2 - 3\hbar^2\right) + \frac{B}{\hbar}(S_{1z} - S_{2z})$$

Scriviamo $H_S = H_A + H_B$

$$H_A = \frac{A}{4\hbar^2}\left(2S_t^2 - 3\hbar^2\right) \qquad H_B = \frac{B}{\hbar}\left(S_{1z} - S_{2z}\right)$$

Nella base considerata H_A è diagonale

$$H_A\,|1\ S_{tz}\rangle = \frac{A}{4\hbar^2}\left(4\hbar^2 - 3\hbar^2\right) = \frac{A}{4}$$

$$H_A\,|0\ 0\rangle = -\frac{3A}{4}$$

La matrice di H_B non è diagonale

($|S_{1z}\,S_{2z}\rangle_{12}$ è la base di autovettori di S_{1z} S_{2z})

$$H_B|1\,1\rangle = \frac{B}{\hbar}\left(S_{1z} - S_{2z}\right)\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle_{12}$$
$$= \frac{B}{\hbar}\left(\frac{\hbar}{2} - \frac{\hbar}{2}\right)\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle_{12} = 0$$

$$H_B|1\,-1\rangle = \frac{B}{\hbar}\left(S_{1z} - S_{2z}\right)\left|-\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{12} = \frac{B}{\hbar}\left(-\frac{\hbar}{2} + \frac{\hbar}{2}\right)\left|-\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{12} = 0$$

$$H_B|1\,0\rangle = \frac{B}{\hbar}\left(S_{1z} - S_{2z}\right)|1\,0\rangle =$$
$$= \frac{B}{\hbar}\left(S_{1z} - S_{2z}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{12} + \left|-\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle_{12}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{B}{\hbar}\left[\left(\frac{\hbar}{2} - \left(-\frac{\hbar}{2}\right)\right)\left|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{12} + \left(-\frac{\hbar}{2} - \frac{\hbar}{2}\right)\left|-\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle_{12}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}B\left[\left|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{12} - \left|-\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle_{12}\right] = B|0\,0\rangle$$

$$H_B|0\,0\rangle = \frac{B}{\hbar}\left(S_{1z} - S_{2z}\right)|0\,0\rangle =$$
$$= \frac{B}{\hbar}\left(S_{1z} - S_{2z}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{12} - \left|-\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle_{12}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{B}{\hbar}\left(\hbar\left|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{12} + \hbar\left|-\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle_{12}\right)$$
$$= B|1\,0\rangle$$

(ovvio per hermiticità)

Dato che sotto H_B $|00\rangle \to |10\rangle$

$|10\rangle \to |00\rangle$

ordiniamo gli stati come $|00\rangle\ |10\rangle\ |11\rangle\ |1-1\rangle$

$$H_A = \begin{pmatrix} -3A/4 & & & 0 \\ & A/4 & & \\ & & A/4 & \\ 0 & & & A/4 \end{pmatrix} \quad \text{(diagonale)}$$

$$H_B = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & B & 0 & \\ B & 0 & & \\ \hline 0 & & 0 & \end{array}\right)$$

$$H_S = \left(\begin{array}{cc|cc} -\frac{3A}{4} & B & 0 & 0 \\ B & A/4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & A/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A/4 \end{array}\right)$$

Le matrice è a blocchi. Due autovalori sono $A/4$ $A/4$

Gli altri due autovalori si ottengono diagonalizzando

$$\begin{pmatrix} -\frac{3A}{4} & B \\ B & \frac{A}{4} \end{pmatrix} = V$$

$$\det(V-\lambda I) = \left(-\frac{3A}{4}-\lambda\right)\left(\frac{A}{4}-\lambda\right) - B^2$$

$$= \lambda^2 + \frac{A\lambda}{2} - \frac{3A^2}{16} - B^2$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\left[-\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4}+\frac{3A^2}{4}+4B^2}\right] = -\frac{A}{4} \pm \frac{1}{2}\sqrt{A^2+4B^2}$$

Gli autovalori di H_S forniscono le soluzione del problema dato che i livelli sono dati da

$$E = \underbrace{E_n}_{\text{autovalori di } H_0} + \lambda_i \quad \text{autovalori di } H_S$$

Nota $|\lambda_i| < E_2 - E_1 = \Delta$ visti i vincoli su A

d) I tre livelli più bassi hanno energia

$$E = E_1 - \frac{13}{12} A \qquad \text{deg. } 1$$

(stato fondamentale)

$$E = E_1 + \frac{A}{4} \qquad \text{deg. } 2$$

$$E = E_1 + \frac{7}{12} A \qquad \text{deg. } 1$$

[Questo per $\underline{B = 2/3\, A}$

$$\lambda = -\frac{A}{4} \pm \frac{5}{6} A = \begin{cases} 7/12\, A \\ -\frac{13}{12} A \end{cases}$$]

e) Dobbiamo calcolare l'autovettore di H_S corrispondente a $\lambda = -13A/12$

$$\begin{pmatrix} -\frac{3A}{4} & \frac{2A}{3} \\ \frac{2A}{3} & \frac{A}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\frac{13}{12} A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -\frac{3A}{4} a + \frac{2A}{3} b = -\frac{13}{12} A a \\ \frac{2A}{3} a + \frac{A}{4} b = -\frac{13}{12} A b \end{cases} \qquad \begin{cases} -9a + 8b = -13a \\ 8a + 3b = -13b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 8b = 0 \\ 8a + 16b = 0 \end{cases}$$ ovviamente equivalenti $\Rightarrow a = -2b$

$$v = (-2b, b) \qquad |v|^2 = 4|b|^2 + |b|^2 = 5|b|^2 \qquad |b| = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$v = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

Quindi $|\text{stato fond}\rangle = -\frac{2}{\sqrt{5}} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |10\rangle$

$$\text{Prob}\,(S_t^2 = 0) = \frac{4}{5}$$

$$\text{Prob}\,(S_t^2 = 2\hbar^2) = \frac{1}{5}$$

NOTE AGGIUNTIVE

Si poteva rispondere alla domanda c) anche utilizzando la base $|S_{1z} S_{2z}\rangle_{12}$; in questo caso H_B è diagonale, mentre non lo è H_A

$$H_B \left|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\right\rangle_{12} = \frac{B}{\hbar}(S_{1z}-S_{2z})\left|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\right\rangle_{12} = 0$$

$$H_B \left|-\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{12} = \frac{B}{\hbar}(S_{1z}-S_{2z})\left|-\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{12} = 0$$

$$H_B \left|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{12} = \frac{B}{\hbar}(S_{1z}-S_{2z})\left|+\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{12} = \frac{B}{\hbar}\left(\frac{\hbar}{2}-\left(-\frac{\hbar}{2}\right)\right)\left|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

$$= B\left|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{12}$$

$$H_B \left|-\tfrac{1}{2}\,+\tfrac{1}{2}\right\rangle_{12} = \frac{B}{\hbar}(S_{1z}-S_{2z})\left|-\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\right\rangle_{12} = -B\left|-\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\right\rangle_{12}$$

$$H_A \left|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\right\rangle_{12} = H_A|1\,1\rangle = \frac{A}{4}$$

$$H_A \left|-\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{12} = H_A|1\,-1\rangle = \frac{A}{4}$$

$$H_A \left|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{12} = H_A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|1\,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|0\,0\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{A}{4}|1\,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{3A}{4}\right)|0\,0\rangle$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2}\,4}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{12} + \left|-\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\right\rangle_{12}\right)\right]$$

$$- \frac{3A}{4\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{12} - \left|-\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\right\rangle_{12}\right)\right]$$

$$= -\frac{A}{4}\left|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{12} + \frac{A}{2}\left|-\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\right\rangle_{12}$$

$$H_A \left|-\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\right\rangle_{12} = H_A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|1\,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|0\,0\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{A}{4}|1\,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{3A}{4}\right)|0\,0\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{A}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{12} + \left|-\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\right\rangle_{12}\right)$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{3A}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{12} - \left|-\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\right\rangle_{12}\right)$$

$$= \frac{A}{2}\left|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{12} - \frac{A}{4}\left|-\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\right\rangle_{12}$$

Ordiniamo gli stati $\left|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\right\rangle_{12}, \left|-\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{12}, \left|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{12}, \left|-\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\right\rangle_{12}$

$$H_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B \end{pmatrix}$$

$$H_S = \left(\begin{array}{cc|cc} A/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A/4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & B-A/4 & A/2 \\ 0 & 0 & A/2 & -B-A/4 \end{array}\right)$$

$$H_A = \left(\begin{array}{cc|cc} A/4 & 0 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ 0 & A/4 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & -A/4 & A/2 \\ & & A/2 & -A/4 \end{array}\right)$$

Due autovalori di H_S sono $A/4$, $A/4$
Gli altri due autovalori si ottengono calcolando

$$\det\left[\begin{pmatrix} B-A/4 & A/2 \\ A/2 & -B-\frac{A}{4}\end{pmatrix} - \lambda \mathbb{1}\right] =$$

$$=\left(B-\frac{A}{4}-\lambda\right)\left(-B-\frac{A}{4}-\lambda\right) - \frac{A^2}{4} = \lambda^2 + \lambda\frac{A}{2} - B^2 - \frac{3A^2}{4}$$

che (ovviamente) è la stessa equazione di prima

Esercizio 2

Ricordiamo che

$$\psi_0(x) = A e^{-\xi^2/2}$$
$$\psi_1(x) = \sqrt{2} A \xi e^{-\xi^2/2}$$

autofunzioni normalizzate dei primi due livelli

Quindi

$$\psi_\alpha(x) = \frac{N}{x_0^{1/2}\pi^{1/4}} \frac{1}{A}\left(2\psi_0(x) + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\psi_1(x)\right)$$

Definiamo $a = \frac{N}{x_0^{1/2}\pi^{1/4}}\frac{1}{A}$

[Nota: $|1\rangle = a^\dagger|0\rangle$, non $|1\rangle = \eta^\dagger|0\rangle$]

$$\psi_\alpha(x) = 2a|0\rangle + a\frac{1+i}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

Normalizziamo lo stato

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = 4|a|^2 + \frac{|a|^2}{2}|1+i|^2 = 5|a|^2 \qquad |a| = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Quindi

$$|\alpha\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}|0\rangle + \frac{1+i}{\sqrt{10}}|1\rangle$$

(a)

$$\text{Prob}\left(E = \frac{\hbar\omega}{2}\right) = \frac{4}{5} \qquad \text{Prob}\left(E = \frac{3}{2}\hbar\omega\right) = \left|\frac{1+i}{\sqrt{10}}\right|^2 = \frac{1}{5}$$

(b)

$$|\alpha t\rangle = e^{-i\omega t/2}\frac{2}{\sqrt{5}}|0\rangle + \frac{1+i}{\sqrt{10}}e^{-3i\omega t/2}|1\rangle$$
$$= \cancel{e^{-i\omega t/2}}\left[\frac{2}{\sqrt{5}}|0\rangle + \frac{1+i}{\sqrt{10}}e^{-i\omega t}|1\rangle\right]$$

eliminata

Ricordiamo che $\langle E|\hat{x}|E\rangle = \langle E|\hat{p}|E\rangle = 0$ per l'oscillatore armonico. Quindi

$$\langle \alpha t|\hat{x}|\alpha t\rangle =$$
$$= \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\langle 0| + \frac{1-i}{\sqrt{10}} e^{i\omega t}\langle 1|\right)\hat{x}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}|0\rangle + \frac{1+i}{\sqrt{10}} e^{-i\omega t}|1\rangle\right)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{10}} e^{-i\omega t}\langle 0|\hat{x}|1\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{1-i}{\sqrt{10}} e^{i\omega t}\langle 1|\hat{x}|0\rangle$$

$$\langle 1|\hat{x}|0\rangle = \langle 1|\frac{x_0}{\sqrt{2}}(a+a^+)|0\rangle = \frac{x_0}{\sqrt{2}}$$
$$\langle 0|\hat{x}|1\rangle = \langle 0|\hat{x}|1\rangle^* = \frac{x_0}{\sqrt{2}}$$

Quindi

$$\langle \alpha t|\hat{x}|\alpha t\rangle = x_0\left[\frac{1+i}{5} e^{-i\omega t} + \frac{1-i}{5} e^{i\omega t}\right]$$
$$= \frac{x_0}{5}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} - i\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)\right)$$
$$= \frac{x_0}{5}\left(2\cos\omega t + 2\sin\omega t\right) = \frac{2}{5}x_0\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right)$$

$$\langle \alpha t|\hat{p}|\alpha t\rangle =$$
$$\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{1+i}{\sqrt{10}} e^{-i\omega t}\langle 0|\hat{p}|1\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{1-i}{\sqrt{10}} e^{i\omega t}\langle 1|\hat{p}|0\rangle$$

$$\langle 1|\hat{p}|0\rangle = \langle 1|\frac{\hbar}{x_0}\frac{i}{\sqrt{2}}(a^+-a)|0\rangle = \frac{i\hbar}{x_0\sqrt{2}}$$

$$\langle 0|\hat{p}|1\rangle = \langle 1|\hat{p}|0\rangle^* = -\frac{i\hbar}{x_0\sqrt{2}}$$

$$\langle \alpha t|\hat{p}|\alpha t\rangle = \frac{\hbar}{x_0}\left[\frac{1}{5}(1+i)e^{-i\omega t}(-i) + \frac{1}{5}(1-i)e^{i\omega t}i\right]$$
$$= \frac{1}{5}\frac{\hbar}{x_0}\left[(1-i)e^{-i\omega t} + (1+i)e^{i\omega t}\right]$$
$$= \frac{2}{5}\frac{\hbar}{x_0}\left(\cos\omega t - \sin\omega t\right)$$

Notiamo che avremmo potuto evitare quest'ultimo calcolo dato che

$$\langle \alpha\, t | \hat{p} | \alpha\, t \rangle = m \frac{d}{dt} \langle \alpha\, t | q | \alpha\, t \rangle$$

$$= m \frac{2}{5} x_0\, \omega \left(-\sin\omega t + \cos\omega t \right) \qquad m\omega x_0 = \frac{\hbar}{x_0}$$

$$= \frac{2}{5} \frac{\hbar}{x_0} \left(\cos\omega t - \sin\omega t \right)$$

Dato che $\hat{\Pi}|0\rangle = |0\rangle$ e $\hat{\Pi}|1\rangle = -|1\rangle$

$$\langle \alpha\, t | \hat{\Pi} | \alpha\, t \rangle = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \langle 0| + \frac{1-i}{\sqrt{10}} e^{+i\omega t} \langle 1| \right) \left(\frac{2|0\rangle}{\sqrt{5}} - \frac{1+i}{\sqrt{10}} e^{-i\omega t} |1\rangle \right)$$

$$= \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

(c)

Calcoliamo

$$\langle n | \delta \hat{H} | n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \lambda \frac{\hbar\omega}{x_0^3} x^3 |\psi_n(x)|^2 = 0$$

(pari sotto $x \to -x$)

Quindi la perturbazione non cambia i livelli ad ordine λ

(d)

Al tempo $t = \frac{2\pi}{\omega}$ $\quad |\alpha\, t\rangle = |\alpha\, 0\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}|0\rangle - \frac{1+i}{\sqrt{10}}|1\rangle$

$$\langle \alpha\, 0 | H_0 | \alpha\, 0 \rangle = \frac{4}{5} \cdot \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{1}{5} \frac{3}{2} \hbar\omega$$

$$= \left(\frac{4}{10} + \frac{3}{10} \right) \hbar\omega = \frac{7}{10} \hbar\omega$$

Per calcolare il valor medio notiamo che

$$\langle n|\hat{x}_0^3|n\rangle = \int dx\, x^3 \underbrace{|\psi_n(x)|^2}_{\text{pari per } x \to -x} = 0$$

Quindi dobbiamo calcolare

$$\langle 1|\hat{x}^3|0\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} x_0^3 \langle 1|(a^+ + a)(a^+ + a)(a^+ + a)|0\rangle$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} x_0^3 \langle 1|\underbrace{\cancel{a^{+3}}}_{=0} + aa^+a^+ + a^+aa^+ + \underbrace{\cancel{aaa^+}}_{=0}|0\rangle$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} x_0^3 \underbrace{\langle 1|aa^+a^+ + a^+aa^+|0\rangle}_{\left(2\langle 2|2\rangle + \langle 0|a|1\rangle\right)} = \frac{3}{2\sqrt{2}} x_0^3$$

$$\langle 0|\hat{x}^3|1\rangle = \frac{3}{2\sqrt{2}} x_0^3$$

$$\langle \alpha\, 0|\hat{x}^3|\alpha\, 0\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{1+i}{\sqrt{10}} \langle 0|\hat{x}^3|1\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{1-i}{\sqrt{10}} \langle 1|\hat{x}^3|0\rangle$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{5}(1+i) + \frac{\sqrt{2}}{5}(1-i)\right) \frac{3}{2\sqrt{2}} x_0^3$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} x_0^3 = \frac{3}{5} x_0^3$$

$$\langle \alpha\, 0|H|\alpha\, 0\rangle = \frac{7}{10}\hbar\omega + \frac{3}{5}\hbar\omega\lambda$$

NOTE AGGIUNTIVE

Alcuni calcoli potevano essere semplificati notando $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{i\pi/4}$ per cui

$$|\alpha\, t\rangle = \frac{2}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\omega t\right)}|1\rangle$$

Quindi

$$\langle \alpha\, t|\hat{x}|\alpha\, t\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}} e^{i(\pi/4-\omega t)} + \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}} e^{-i(\pi/4-\omega t)}\frac{x_0}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4}{5}\frac{x_0}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\omega t\right)$$

Analogamente

$$\langle \alpha\, t|\hat{p}|\alpha\, t\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}} e^{i(\pi/4-\omega t)}\left(-\frac{i\hbar}{x_0\sqrt{2}}\right)$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}} e^{-i(\pi/4-\omega t)}\frac{i\hbar}{x_0\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2}{5}\frac{\hbar}{x_0\sqrt{2}}\frac{1}{i}\left(e^{i(\pi/4-\omega t)} - e^{-i(\pi/4-\omega t)}\right)$$

$$= \frac{4}{5}\frac{\hbar}{x_0\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\omega t\right)$$

Infine

$$\langle \alpha\, 0|\hat{x}^3|\alpha\, 0\rangle = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}} e^{i\pi/4} + \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{5}} e^{-i\pi/4}\right)\frac{3}{2\sqrt{2}}x_0^3$$

$$= \frac{4}{5}\left(\cos\pi/4\right)\frac{3}{2\sqrt{2}}x_0^3 = \frac{3}{5}x_0^3$$