Esercizio 1

Devo compilare un questionario online, composto da 5 pagine. La compilazione di ogni pagina (indipendentemente dalle altre) richiede 1 minuto (con probabilità 0.3) oppure 2 minuti (con probabilità 0.7). Dopo 8 minuti scade la connessione al sito.

1. Calcolare la probabilità che io riesca a completare la procedura (entro gli 8 minuti)
2. Calcolare la probabilità che sia riuscito a completarla in esattamente 5 minuti, sapendo che l'ho completata
3. Supponendo ora che, con probabilità 2/3, il sito resti attivo un minuto in più, ricalcolare la probabilità al punto 1.

Esercizio 2

Sia X una v.a. con funzione di densità $f(x) = sen\, x$, per $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Sia Y una v.a., indipendente da X, che assume i valori 0 e $\frac{\pi}{2}$, con uguale probabilità.

1. trovare la funzione di ripartizione di $Z = X+Y$
2. trovare la densità di Z
3. verificare che $\mathbb{E}Z$ e $\mathbb{E}(X+Y)$ coincidono
4. studiare la f.r. di $Z_n = \frac{X+Y}{n}$
5. mostrare che Z_n, per $n \to \infty$, converge in media quadratica e in probabilità (e quindi in distribuzione) alla stessa v.a.

ES. 1.

$F =$ "minuto di fine procedura"

$C =$ "minuto di fine connessione"

$N =$ "n° pagine completate in 2 min"

i) $\boxed{P(F \leq C)} = \sum_{j=0}^{5} P(F \leq C, N=j)$

$$= \sum_{j=0}^{5} P(F \leq C \mid N=j)\, P(N=j)$$

$$= P(N=0) + P(N=1) + P(N=2) + P(N=3)$$

$$\left[\text{poiché } P(F \leq C \mid N=j) = \begin{cases} 0 & j=4,5 \\ 1 & j=0,1,2,3 \end{cases} \right]$$

$$= \sum_{j=0}^{3} \binom{5}{j} 0{,}7^{j} \cdot 0{,}3^{5-j} = 1 - \sum_{j=4}^{5} \binom{5}{j} 0{,}7^{j}\, 0{,}3^{5-j}$$

$$= 1 - 0{,}7^{5} - 5 \cdot 0{,}7^{4} \cdot 0{,}3 = 1 - 0{,}528 = \boxed{0{,}47}$$

ii) $\boxed{P(F=5 \mid F \leq C)} = \dfrac{P(F=5, F \leq C)}{P(F \leq C)} = \dfrac{P(F=5)}{P(F \leq C)}$

$$= \frac{0{,}3^{5}}{0{,}47} = \frac{0{,}002}{0{,}47} = \boxed{0{,}005}$$

iii) $\boxed{P(F \leq C)} = P(F \leq C \mid C=8)\, P(C=8) + P(F \leq C \mid C=9)$

$\cdot P(C=8)$

$= \frac{1}{3}\left(1-P(N=5)\right) + \frac{2}{3}\cdot 0{,}47 = \frac{1}{3}(1-0{,}7^5)+\frac{2}{3}\cdot 0{,}47 = \boxed{0{,}6}$

ES. 2 i) $Z \in (0,\pi)$ q.c.

$$F_Z(z) = P(Z<z) = P(Z<z, Y=0) + P(Z<z, Y=\tfrac{\pi}{2})$$

$$= P(X+Y<z \mid Y=0)\cdot P(Y=0) + P(X+Y<z \mid Y=\tfrac{\pi}{2})\cdot P(Y=\tfrac{\pi}{2})$$

$$= \frac{1}{2}\left[P(X<z) + P(X<z-\tfrac{\pi}{2})\right]$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} P(X<z) & 0<z\le\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}P(X<z-\frac{\pi}{2}) & \frac{\pi}{2}<z\le\pi \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}(1-\cos z) & 0<z\le\frac{\pi}{2} \\ 1-\frac{1}{2}\operatorname{sen} z & \frac{\pi}{2}<z\le\pi \end{cases}$$

ii)

$\Rightarrow$ densità $f_Z(z) = \frac{d}{dz}F_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin z & 0<z\le\frac{\pi}{2} \\ -\frac{1}{2}\cos z & \frac{\pi}{2}<z<\pi \end{cases}$

iii) $\mathbb{E}Z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{z}{2}\sin z\, dz - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{z}{2}\cos z\, dz$

$$= \cancel{-\frac{z}{2}\cos z\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos z\, dz - \frac{z}{2}\sin z\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{sen} z\, dz$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen} z\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{4} \cancel{+} \frac{1}{2}\cos z\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{\pi}{4}$$

$$\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen} x\, dx + \cancel{0 \cdot \frac{1}{2}} + \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} = 1 + \frac{\pi}{4}$$

iv) $$P(Z_n < z) = P(X+Y < nz) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-\cos nz) & 0 < z \le \frac{\pi}{2n} \\ 1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen} nz & \frac{\pi}{2n} < z \le \frac{\pi}{n} \end{cases}$$

v) $$\mathbb{E}\left(\frac{X+Y}{n} - 0\right)^2 = \frac{1}{n^2}\left[\mathbb{E}X^2 + \mathbb{E}Y^2 - 2\,\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y\right]$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} 0$$

perché $\mathbb{E}X$ e $\mathbb{E}X^2$ sono finiti

e $\mathbb{E}Y^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} < \infty$

Perciò $Z_n \xrightarrow{\text{i.m.q.}} 0 \Rightarrow Z_n \xrightarrow{\text{i.p.}} 0 \Rightarrow Z_n \xrightarrow{\text{i.d.}} 0$