

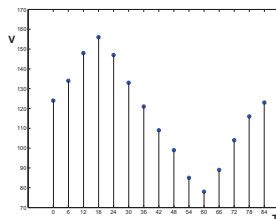
Esempio

Una macchina da corsa percorre un giro di pista in 84 secondi. La velocità della macchina viene misurata con un radar ogni 6 secondi per tutta la durata del percorso. I valori misurati sono riportati in tabella:

T (s)	0	6	12	18	24	30	36
V (m/s)	124	134	148	156	147	133	121

T (s)	42	48	54	60	66	72	78	84
V (m/s)	109	99	85	78	89	104	116	123

Quanto è lunga la pista?



Integrazione numerica

Problema: approssimare **numericamente** integrali definiti

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

L'intervallo di integrazione $[a, b]$ può essere anche illimitato.

Si ricorre all'**integrazione numerica** quando:

- la primitiva di f **non** può essere espressa in **forma chiusa**, ad esempio $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $f(x) = e^{-x^2}$;
- l'**espressione analitica** di $I(f)$ è **complicata** da calcolare;
- i valori di f sono noti solo in alcuni **nodi** x_i , $i = 0, \dots, n$, ad esempio quando sono il risultato di misure sperimentali.

Soluzione: **approssimare** la funzione integranda $f(x)$ con il **polinomio interpolatore** $p_n(x)$, costruito su un insieme opportuno di **nodi** x_i , $i = 0, \dots, n$; quindi approssimare $I(f)$ con $I(p_n)$.

Formule di quadratura interpolatorie

Formula di interpolazione di Lagrange:

$$f(x) = p_n^*(x) + E_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) + E_n(x)$$

↓

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left[\sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) + E_n(x) \right] dx =$$

$$= \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b l_i(x) dx + \int_a^b E_n(x) dx =$$

$$= \sum_{i=0}^n f(x_i) c_i + R_n(f) = \underbrace{S_n(f)}_{\text{Parte approssimante}} + \underbrace{R_n(f)}_{\text{Errore di troncamento}}$$

Parte approssimante

Coefficienti: $c_i = \int_a^b l_i(x) dx$

Errore di troncamento

• **resto**

Se consideriamo anche gli **errori** ϵ_i sui dati si ha

$$f(x) = p_n(x) + E_n(x) = \sum_{i=0}^n (f(x_i) + \epsilon_i) l_i(x) + E_n(x)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b l_i(x) dx + \int_a^b E_n(x) dx + \sum_{i=0}^n \epsilon_i \int_a^b l_i(x) dx$$

$$= \sum_{i=0}^n f(x_i) c_i + \int_a^b E_n(x) dx + \sum_{i=0}^n \epsilon_i c_i =$$

$$= S_n(f) + R_n(f) + \underline{R_n^*(f)}$$

Errore di propagazione

$$I(f) = S_n(f) + R_n(f) + R_n^*(f) \left\{ \begin{array}{l} S_n(f) = \sum_{i=0}^n f(x_i) c_i \quad \text{Parte approssimante} \\ c_i = \int_a^b l_i(x) dx \quad \text{Coefficienti} \\ R_n(f) = \int_a^b E_n(x) dx = \int_a^b \frac{\pi_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(x)) dx \quad \text{Resto} \\ R_n^*(f) = \sum_{i=0}^n \epsilon_i c_i \quad \text{Errore di propagazione} \end{array} \right.$$

4

Grado di precisione

L'**interpolazione** è **esatta** per ogni polinomio $q_m(x)$ di grado $m \leq n$, quindi $E_n(x) = 0 \implies R_n(q_m) = 0$, cioè la **formula di quadratura** è **esatta** per ogni polinomio $q_m(x)$ di grado $m \leq n$.

Definizione. Si dice che una formula di quadratura ha **grado di precisione** ν se è **esatta** per **tutti** i polinomi $q_m(x)$ di grado $m \leq \nu$, cioè $R_n(q_m) = I(q_m) - S_n(q_m) = 0$, $m \leq \nu$. In particolare, la formula di quadratura è **esatta** per i **monomi** x^k , $k = 0, 1, \dots, \nu$.

- Una formula di quadratura **interpolatoria** a n **nodi** ha grado di precisione **almeno** $n \geq 0$.
↓
- Le formule di quadratura **interpolatorie** sono **esatte** almeno per le funzioni **costanti**. In particolare, se si pone $f(x) = 1$, si ottiene

$$\sum_{i=0}^n c_i = b - a$$

5

Consideriamo il polinomio di grado $2n + 2$

$$\Pi(x) = (\pi(x))^2 = (x - x_0)^2(x - x_1)^2 \cdots (x - x_n)^2$$

dove x_i , $i = 0, \dots, n$, sono i **nodi** della formula di quadratura.

- $I(\Pi) = \int_a^b \Pi(x) dx > 0$

- $I(\Pi) = S_n(\Pi) + R_n(\Pi) = \sum_{i=0}^n c_i \underbrace{\Pi(x_i)}_{=0} + R_n(\Pi) = R_n(\Pi)$

$\implies R_n(\Pi) > 0$: esiste **almeno un polinomio** di grado $2n + 2$ per il quale le formule di quadratura interpolatorie **non** sono **esatte**, quindi $\nu < 2n + 2$.

\implies Per le **formule interpolatorie** si ha

$$n \leq \nu \leq 2n + 1$$

$$n \geq 0$$

6

Scelta dei nodi nelle formule interpolatorie

Differenti **distribuzioni di nodi** danno origine a differenti formule di quadratura con diverso grado di precisione.

• Formule di Newton-Cotes

Nodi equispaziati: $x_i = a + ih$ $i = 0, 1, \dots, n$ $h = \frac{b-a}{n}$

Grado di precisione: $\begin{cases} \nu = n, & n+1 \text{ pari} \\ \nu = n+1, & n+1 \text{ dispari} \end{cases}$

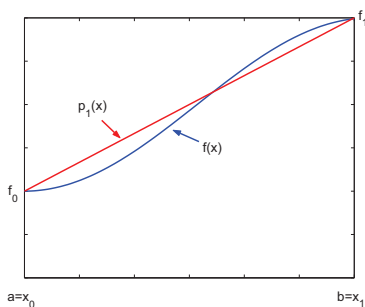
• Formule gaussiane

Nodi gaussiani: **zeri** di polinomi ortogonali, ad esempio i **nodi di Chebyshev**; non sono equispaziati e sono interni all'intervallo $[a, b]$.

Grado di precisione: $\nu = 2n + 1$ (massimo)

7

Formula del trapezio: $n + 1 = 2, \nu = 1, f \in C^2[a, b]$



Si approssima $f(x)$ con un **polinomio interpolatore** di grado 1 che passa per i punti:
 $(x_0, f_0), (x_1, f_1)$

$$\begin{aligned} f(x) &= f_0 l_0(x) + f_1 l_1(x) + \frac{\pi_1(x)}{2!} f''(\xi(x)) = \\ &= f_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + f_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} + \frac{1}{2} (x - x_0)(x - x_1) f''(\xi(x)) \end{aligned}$$

8

Parte approssimante:

$$\begin{aligned} S_1(f) &= f_0 \int_a^b \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} dx + f_1 \int_a^b \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} dx = \\ &= \frac{1}{2} f_0 (x_1 - x_0) + \frac{1}{2} f_1 (x_1 - x_0) = \frac{1}{2} (f_0 + f_1) (b - a) = \\ &= \frac{1}{2} (f_0 + f_1) h \end{aligned}$$

Resto:

$$R_1(f) = \frac{1}{2} \int_a^b (x - x_0)(x - x_1) f''(\xi(x)) dx \stackrel{\text{Teorema della media}}{=} -\frac{1}{12} h^3 f''(\tau) \quad \tau \in [a, b]$$

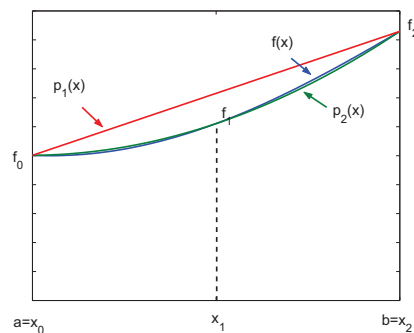
Teorema della media

9

Formula di Cavalieri-Simpson

$$n + 1 = 3, \nu = 3, f \in C^4[a, b]$$

Si approssima $f(x)$ con una **parabola** (polinomio di secondo grado) che passa per i punti: $(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2)$.



Parte approssimante: $S_2(f) = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2)$

Resto: $R_2(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\tau) \quad \tau \in [a, b]$

10

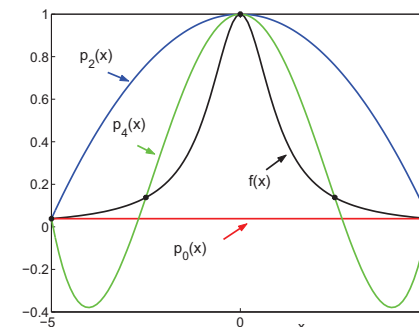
Convergenza delle formule di quadratura

Convergenza: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f) = I(f) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f) = 0$

- Al **crescere di n** il polinomio interpolatore potrebbe non convergere \Rightarrow anche la formula di quadratura potrebbe fornire **risultati inaccurati**.

Fenomeno di Runge:

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2} \quad x \in [-5, 5]$$



\Rightarrow Le formule di quadratura interpolatorie **convergono** in tutti quei casi in cui **converge il polinomio interpolatore**.

11

Teorema. Sia $f \in C[a, b]$, $[a, b]$ limitato, sia $\{S_n(f)\}$ una **successione** di **formule di quadratura interpolatorie**

$$S_n(f) = \sum_{i=0}^n c_i f(x_i) \quad \text{tale che} \quad \sum_{i=0}^n |c_i| \leq M \quad \forall n,$$

allora $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f) = I(f)$.

Nota 1. Per le formule di quadratura interpolatorie a **coefficienti positivi** si ha

$$\sum_{i=0}^n |c_i| = \sum_{i=0}^n c_i = b - a$$

per cui l'ipotesi del **Teorema** è soddisfatta con $M = b - a$.

↓

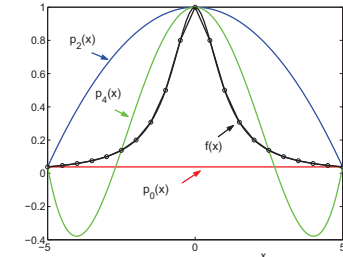
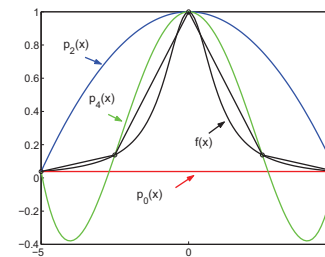
Ogni **successione** di formule di quadratura interpolatorie a **coefficienti positivi** è **convergente**.

Nota 2. I coefficienti delle **formule di Newton-Cotes** sono **tutti positivi** se $n \leq 7$, mentre sono sia **positivi** che **negativi** per $n > 7$. I coefficienti delle **formule gaussiane** sono **tutti positivi** per ogni valore di n .

12

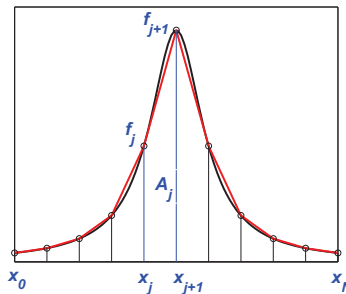
Formule di Newton-Cotes generalizzate

- Per $n > 7$ i coefficienti c_i delle formule di Newton-Cotes hanno segni sia **positivi** che **negativi** → oltre a non essere garantita la convergenza, si può avere un'**amplificazione** degli errori sui dati, e quindi un'**instabilità numerica**.
- Per evitare l'uso di formule di Newton-Cotes di **grado elevato**, quando si dispone di un numero **elevato** di dati $\{x_i, f_i\}$, $i = 0, \dots, n$, si divide l'intervallo di integrazione in N **sottointervalli** e si utilizza in ciascun sottointervallo una formula di Newton-Cotes di **grado basso** (in genere di grado **1** o **2**).



13

Formula dei trapezi

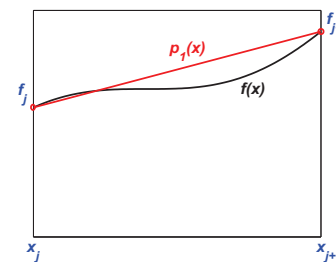


L'integrale $I(f)$ viene **approssimato** con la somma delle aree dei **trapezi** A_j .

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) dx \approx \sum_{j=0}^{N-1} A_j = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{h}{2} (f_j + f_{j+1})$$

14

Formula del trapezio: $n = 1, \nu = 1, f \in C^2[a, b]$



Si approssima **localmente** $f(x)$ con un **polinomio interpolatore** di grado $n = 1$ che passa per i punti:

$$(x_j, f_j), (x_{j+1}, f_{j+1})$$

$$f(x) = f_j l_j(x) + f_{j+1} l_{j+1}(x) + \frac{\pi_1(x)}{2!} f''(\xi_j(x)) = f_j \frac{(x - x_{j+1})}{(x_j - x_{j+1})} + f_{j+1} \frac{(x - x_j)}{(x_{j+1} - x_j)} + \frac{1}{2} (x - x_j)(x - x_{j+1}) f''(\xi_j(x))$$

$$\xi_j(x) \in [x_j, x_{j+1}]$$

15

Parte approssimante:

$$\begin{aligned} S_1(f) &= f_j \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{(x - x_{j+1})}{(x_j - x_{j+1})} dx + f_{j+1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{(x - x_j)}{(x_{j+1} - x_j)} dx = \\ &= \frac{1}{2} f_j (x_{j+1} - x_j) + \frac{1}{2} f_{j+1} (x_{j+1} - x_j) = \frac{1}{2} (f_j + f_{j+1}) (x_{j+1} - x_j) = \\ &= \frac{h}{2} (f_j + f_{j+1}) \end{aligned}$$

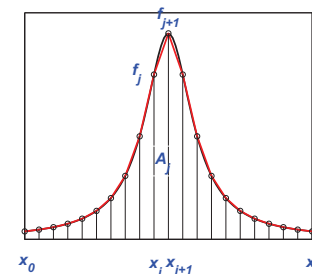
Resto:

$$R_1(f) = \frac{1}{2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (x - x_j)(x - x_{j+1}) f''(\xi_j(x)) dx \stackrel{\downarrow}{=} -\frac{1}{12} h^3 f''(\tau_j)$$

Teorema della media $\tau_j \in [x_j, x_{j+1}]$

16

Formula dei trapezi



In ogni **sottointervallo** $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, \dots, N-1$, si applica la **formula del trapezio** con $h = \frac{b-a}{N}$.

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) dx = \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{h}{2} (f_j + f_{j+1}) + \sum_{j=0}^{N-1} \left(-\frac{h^3}{12} \right) f''(\tau_j) \quad \tau_j \in [x_j, x_{j+1}] \end{aligned}$$

17

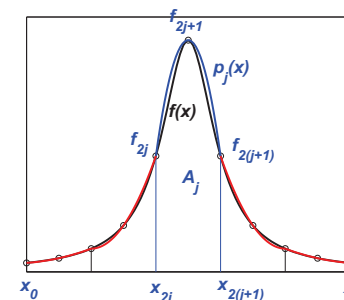
$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) dx = \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{h}{2} (f_j + f_{j+1}) + \sum_{j=0}^{N-1} \left(-\frac{h^3}{12} \right) f''(\tau_j) = \\ &= \frac{h}{2} (f_0 + f_1 + f_1 + f_2 + f_2 + f_3 + \dots + f_{N-2} + f_{N-2} + f_{N-1} + f_N) - \left(\frac{h^3}{12} \right) \sum_{j=0}^{N-1} f''(\tau_j) = \\ &= \frac{h}{2} \left(f_0 + 2 \sum_{j=1}^{N-1} f_j + f_N \right) - \left(\frac{h^3}{12} \right) N f''(\tau) \quad \tau \in [a, b] \end{aligned}$$

$$\text{Formula dei trapezi: } \begin{cases} T_N(f) = \frac{h}{2} \left(f_0 + 2 \sum_{j=1}^{N-1} f_j + f_N \right) \\ R_N^T(f) = - \left(\frac{b-a}{12} \right) h^2 f''(\tau) \quad \tau \in [a, b] \end{cases}$$

Grado di precisione: $\nu = 1$

18

Formula delle parabole



L'integrale $I(f)$ viene **approssimato** con la somma delle aree al di sotto della **parabola** $p_j(x)$.

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^{N/2-1} \int_{x_{2j}}^{x_{2(j+1)}} f(x) dx \approx \\ &\approx \sum_{j=0}^{N/2-1} A_j = \sum_{j=0}^{N/2-1} \frac{h}{3} (f_{2j} + 4f_{2j+1} + f_{2(j+1)}) \end{aligned}$$

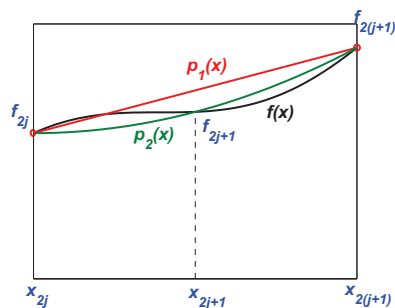
19

Formula di Cavalieri-Simpson

$$n = 2, \nu = 3, f \in C^4[a, b]$$

Si approssima **localmente** $f(x)$ con una **parabola** (polinomio di secondo grado) che passa per i punti:

$$(x_{2j}, f_{2j}), (x_{2j+1}, f_{2j+1}), (x_{2(j+1)}, f_{2(j+2)})$$



20

$$f(x) = f_{2j} l_{2j}(x) + f_{2j+1} l_{2j+1}(x) + f_{2(j+1)} l_{2(j+1)}(x) + \frac{\pi_2(x)}{3!} f^{(3)}(\xi_j(x)) =$$

$$= f_{2j} \frac{(x - x_{2j+1})(x - x_{2(j+1)})}{(x_{2j} - x_{2j+1})(x_{2j} - x_{2(j+1)})} +$$

$$+ f_{2j+1} \frac{(x - x_{2j})(x - x_{2(j+1)})}{(x_{2j+1} - x_{2j})(x_{2j+1} - x_{2(j+1)})} +$$

$$+ f_{2(j+1)} \frac{(x - x_{2j})(x - x_{2j+1})}{(x_{2(j+1)} - x_{2j})(x_{2(j+1)} - x_{2j+1})} +$$

$$+ \frac{1}{6} (x - x_{2j})(x - x_{2j+1})(x - x_{2(j+1)}) f^{(3)}(\xi_j(x))$$

$$\xi_j(x) \in [x_{2j}, x_{2(j+1)}]$$

21

Parte approssimante:

$$\begin{aligned} S_2(f) &= f_{2j} \int_{x_{2j}}^{x_{2(j+1)}} l_{2j}(x) dx + f_{2j+1} \int_{x_{2j}}^{x_{2(j+1)}} l_{2j+1}(x) dx + \\ &+ f_{2(j+1)} \int_{x_{2j}}^{x_{2(j+1)}} l_{2(j+1)}(x) dx = \\ &= f_{2j} \int_{x_{2j}}^{x_{2(j+1)}} \frac{(x - x_{2j+1})(x - x_{2(j+1)})}{(x_{2j} - x_{2j+1})(x_{2j} - x_{2(j+1)})} dx + \\ &+ f_{2j+1} \int_{x_{2j}}^{x_{2(j+1)}} \frac{(x - x_{2j})(x - x_{2(j+1)})}{(x_{2j+1} - x_{2j})(x_{2j+1} - x_{2(j+1)})} dx + \\ &+ f_{2(j+1)} \int_{x_{2j}}^{x_{2(j+1)}} \frac{(x - x_{2j})(x - x_{2j+1})}{(x_{2(j+1)} - x_{2j})(x_{2(j+1)} - x_{2j+1})} dx = \\ &= \frac{h}{3} (f_{2j} + 4f_{2j+1} + f_{2(j+1)}) \end{aligned}$$

22

Resto:

$$R_2(f) = \frac{1}{6} \int_{x_{2j}}^{x_{2(j+1)}} (x - x_{2j})(x - x_{2j+1})(x - x_{2(j+1)}) f^{(3)}(\xi_j(x)) dx =$$

$$\stackrel{\equiv}{\downarrow} - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\tau_j) \quad \tau_j \in [x_{2j}, x_{2(j+1)}]$$

Teorema
della media

23

Formula delle parabole

In ogni **sottointervallo** $[x_{2j}, x_{2(j+1)}]$, $j = 0, 1, \dots, N/2 - 1$, si applica la **formula di Cavalieri-Simpson** con $h = \frac{b-a}{N}$.

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^{N/2-1} \int_{x_{2j}}^{x_{2(j+1)}} f(x) dx = \\ &= \sum_{j=0}^{N/2-1} \frac{h}{3} (f_{2j} + 4f_{2j+1} + f_{2(j+1)}) + \sum_{j=0}^{N/2-1} \left(-\frac{h^5}{90} \right) f^{(4)}(\tau_j) \\ &\qquad\qquad\qquad \tau_j \in [x_j, x_{j+1}] \end{aligned}$$

24

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^{N/2-1} \int_{x_{2j}}^{x_{2(j+1)}} f(x) dx = \\ &= \sum_{j=0}^{N/2-1} \frac{h}{3} (f_{2j} + 4f_{2j+1} + f_{2(j+1)}) + \sum_{j=0}^{N/2-1} \left(-\frac{h^5}{90} \right) f^{(4)}(\tau_j) = \\ &= \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2 + f_2 + 4f_3 + f_4 + f_4 + 4f_5 + f_6 + \dots + f_{N-2} + f_{N-2} + 4f_{N-1} + f_N) - \\ &\quad - \left(\frac{h^5}{90} \right) \sum_{j=0}^{N/2-1} f^{(4)}(\tau_j) = \frac{h}{3} \left(f_0 + 4 \sum_{j=0}^{N/2-1} f_{2j+1} + 2 \sum_{j=1}^{N/2-1} f_{2j} + f_N \right) - \left(\frac{h^5}{90} \right) \frac{N}{2} f^{(4)}(\tau) \end{aligned}$$

Formula delle parabole:

$$\begin{cases} P_N(f) = \frac{h}{3} \left(f_0 + 4 \sum_{j=0}^{N/2-1} f_{2j+1} + 2 \sum_{j=1}^{N/2-1} f_{2j} + f_N \right) \\ R_N^P(f) = - \left(\frac{b-a}{180} \right) h^4 f^{(4)}(\tau) \quad \tau \in [a, b] \end{cases}$$

Grado di precisione: $\nu = 3$

Nota. Per poter usare la formula delle parabole il **numero di nodi** $N + 1$ deve essere **dispari**.

25

Convergenza delle formule dei trapezi e delle parabole

Formula dei trapezi:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} T_N(f) = I(f) \iff \lim_{N \rightarrow \infty} R_N^T(f) = 0$$

Se $f \in C^{(2)}[a, b]$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R_N^T(f) \underset{h = \frac{b-a}{N}}{\equiv} \lim_{h \rightarrow 0} R_N^T(f) = \lim_{h \rightarrow 0} - \left(\frac{b-a}{12} \right) h^2 f''(\tau) = 0$$

Formula delle parabole:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N(f) = I(f) \iff \lim_{N \rightarrow \infty} R_N^P(f) = 0$$

Se $f \in C^{(4)}[a, b]$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R_N^P(f) \underset{h = \frac{b-a}{N}}{\equiv} \lim_{h \rightarrow 0} R_N^P(f) = \lim_{h \rightarrow 0} - \left(\frac{b-a}{180} \right) h^4 f^{(4)}(\tau) = 0$$

26

Esempio

Una macchina da corsa percorre un giro di pista in 84 secondi. La velocità della macchina viene misurata con un radar ogni 6 secondi per tutta la durata del percorso. I valori misurati sono riportati in tabella:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
t_i	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84
v_i	124	134	148	156	147	133	121	109	99	85	78	89	104	116	123

Quanto è lunga la pista?

Traccia della soluzione.

La lunghezza della strada percorsa da una macchina che si muove a velocità $v(t)$ nell'intervallo $[t_0, t_1]$ è data da $L = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt$. Quindi si può approssimare la lunghezza della pista con una **formula di quadratura generalizzata**.

Formula dei trapezi: $L \approx 3 \left(v_0 + 2 \sum_{i=1}^{13} v_i + v_{14} \right) = 9855$

Formula delle parabole: $L \approx 2 \left(v_0 + 4 \sum_{i=0}^6 v_{2i+1} + 2 \sum_{i=1}^6 v_{2i} + v_{15} \right) = 9858$

27

Errore di propagazione

Assumendo che per l'**errore sui dati** valga la limitazione $|\varepsilon_i| \leq \varepsilon = 0.5$, per l'**errore di propagazione** si ottiene la maggiorazione:

$$|R_n^*(f)| = \left| \sum_{i=0}^n \varepsilon_i c_i \right| \leq \sum_{i=0}^n |\varepsilon_i| |c_i| \leq \varepsilon \sum_{i=0}^n |c_i|$$

Poiché entrambe le formule di quadratura hanno **coefficienti** c_i **positivi** si ha

$$|R_n^*(f)| \leq \varepsilon \sum_{i=0}^n |c_i| \leq \varepsilon \sum_{i=0}^n c_i = \varepsilon (b-a) = 0.5 \cdot 84 = 42$$

28

Criterio di Runge

Nel caso delle **formule generalizzate** è possibile **stimare il resto** senza ricorrere al calcolo della derivata.

Formula dei trapezi: $R_h^T(f) = -\left(\frac{b-a}{12}\right) h^2 f''(\tau) \quad \tau \in [a, b]$

Passo $h \rightarrow I(f) = T_h(f) + R_h^T(f) = T_h(f) - \left(\frac{b-a}{12}\right) h^2 f''(\tau)$

Passo $\frac{h}{2} \rightarrow I(f) = T_{h/2}(f) + R_{h/2}^T(f) = T_{h/2}(f) - \left(\frac{b-a}{12}\right) \left(\frac{h}{2}\right)^2 f''(\sigma)$

Se $f''(x)$ varia poco in $[a, b] \Rightarrow f''(\tau) \simeq f''(\sigma)$

$$\Rightarrow R_h^T(f) = -\left(\frac{b-a}{12}\right) h^2 f''(\tau) \simeq -\left(\frac{b-a}{12}\right) h^2 f''(\sigma) = 4R_{h/2}^T(f)$$

29

$$\left. \begin{array}{l} \text{Passo } h \rightarrow I(f) \simeq T_h(f) + 4R_{h/2}^T(f) \\ \text{Passo } \frac{h}{2} \rightarrow I(f) = T_{h/2}(f) + R_{h/2}^T(f) \end{array} \right\} \text{Sottraendo le due formule} \\ \text{si ottiene } \Downarrow$$

Criterio di Runge (per trapezi): $R_{h/2}^T(f) \simeq \frac{1}{3}(T_{h/2}(f) - T_h(f))$

Formula delle parabole: $R_h^P(f) = -\left(\frac{b-a}{180}\right) h^4 f^{(4)}(\tau) \quad \tau \in [a, b]$

Passo $h \rightarrow I(f) = P_h(f) + R_h^P(f) = P_h(f) - \left(\frac{b-a}{180}\right) h^4 f^{(4)}(\tau)$

Passo $\frac{h}{2} \rightarrow I(f) = P_{h/2}(f) + R_{h/2}^P(f) = P_{h/2}(f) - \left(\frac{b-a}{180}\right) \left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\sigma)$

Se $f^{(4)}(x)$ varia poco in $[a, b] \Rightarrow f^{(4)}(\tau) \simeq f^{(4)}(\sigma)$

$$\Rightarrow R_h^P(f) = -\left(\frac{b-a}{180}\right) h^4 f^{(4)}(\tau) \simeq -\left(\frac{b-a}{180}\right) h^4 f^{(4)}(\sigma) = 16R_{h/2}^P(f)$$

Criterio di Runge (per parabole): $R_{h/2}^P(f) \simeq \frac{1}{15}(P_{h/2}(f) - P_h(f))$

30

Estrapolazione di Richardson

Il **criterio di Runge** permette di **stimare** il resto tramite le sole **parti approssimanti** relative ai passi h e $h/2$.

La **stima** ottenuta può essere utilizzata per ottenere una **nuova approssimazione**, più accurata, dell'integrale.

Estrapolazione di Richardson (per trapezi):

$$I(f) = T_{h/2}(f) + R_{h/2}^T(f) \simeq T_{h/2}(f) + \frac{1}{3}(T_{h/2}(f) - T_h(f))$$

Estrapolazione di Richardson (per parabole):

$$I(f) = P_{h/2}(f) + R_{h/2}^P(f) \simeq P_{h/2}(f) + \frac{1}{15}(P_{h/2}(f) - P_h(f))$$

31

Esempio

Qual'è l'**errore** che si commette approssimando la lunghezza della pista con la **formula dei trapezi**?

Per stimare l'errore si può utilizzare il **criterio di Runge** utilizzando come approssimazione al passo $h/2$ l'approssimazione con passo $h/2 = 6$ (si usano **tutti** i nodi) e come approssimazione al passo h l'approssimazione al passo $h = 12$ (si usano **solo** gli **8** nodi $i = 0, 2, 4, \dots, 14$).

Criterio di Runge per trapezi: $R \approx \frac{1}{3}(9855 - 9846) = 3$

Estrapolazione di Richardson: $L \approx 9855 + \frac{1}{3}(9855 - 9846) = 9858$

È possibile applicare il criterio di Runge per la **formula delle parabole**?

Suggerimento: Dividere l'intervallo di integrazione in due sottointervalli, $[0, 72]$ e $[72, 84]$, quindi applicare il criterio di Runge per parabole nel primo intervallo e il criterio di Runge per trapezi nel secondo.

32

La funzione trapz(X,Y)

La funzione **trapz(X,Y)** permette di approssimare un integrale con la **formula dei trapezi**. **X** e **Y** sono due vettori che contengono i **nodi** e i **valori nei nodi** della funzione da integrare, rispettivamente.

```
>>X=linspace(0,1)
>>Y=exp(X)
>>trapz(X,Y)
```

34

Esercizio

$$I(e^x) = \int_0^1 e^x dx = e - 1 \simeq 1.7182818$$

$$\text{Passo } h = \frac{1}{2} \rightarrow P_{1/2}(e^x) = \frac{1}{6}(e^0 + 4e^{0.5} + e^1) \simeq 1.7188611$$

$$I(e^x) - P_{1/2}(e^x) = -0.58 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{Passo } h = \frac{1}{4} \rightarrow P_{1/4}(e^x) = \frac{1}{12}[e^0 + 4(e^{0.25} + e^{0.75}) + 2e^{0.5} + e^1] \simeq 1.7183188$$

$$I(e^x) - P_{1/4}(e^x) = -0.37 \cdot 10^{-4}$$

Criterio di Runge:

$$R_{1/4}^P \simeq \frac{1}{15}(P_{1/4}(e^x) - P_{1/2}(e^x)) = \frac{1}{15}(1.7183188 - 1.7188611) = -0.36 \cdot 10^{-4}$$

Estrapolazione di Richardson:

$$I(e^x) \simeq P_{1/4}(e^x) + \frac{1}{15}(P_{1/4}(e^x) - P_{1/2}(e^x)) \simeq 1.7182826 = A$$

$$I(f) - A = 1.7182818 - 1.7182826 = -0.8 \cdot 10^{-6}$$

33

Formula delle parabole: function Matlab

```
function [I] = parabole(xnodi,fnodi)
% I=parabole(xnodi,fnodi): Approssimazione di un integrale
% con la formula delle parabole

nnodi = length(xnodi);
a = xnodi(1);
b = xnodi(nnodi);
h = (b-a)/(nnodi-1);
I = h/3*(fnodi(1)+4*sum(fnodi(2:2:nnodi-1))+ ...
... 2*sum(fnodi(3:2:nnodi-2))+fnodi(nnodi));
```

35

Formula dei trapezi: programma Fortran

```
program trapezi
*
* Programma per l'approssimazione di un integrale
* con il metodo dei trapezi.
*
* Input: (da file)
* - n+1: numero di nodi
* - xnodi(0:n): ascisse
* - ynodi(0:n): ordinate
* Variabili:
* - real a,b: estremi dell'intervallo di integrazione
* - real h: passo di integrazione
* - integer i: indice del ciclo do
* - real sumI: variabile di accumulazione
* Output:
* - real Intf: integrale approssimato
*
  implicit none
  real sumI, Intf, a, b, h
  integer nmax, n, i

  parameter (nmax=150)
  real xnodi(0:nmax), ynodi(0:nmax)
```

36

```
*
* Lettura dati di input
*
  open (20,file='valnodi.dat')
  read (20,*) n
  if (n .gt. nmax) stop 'n>nmax'
  read (20,*) (xnodi(i), ynodi(i), i=0,n)
  close(20)
*
* Inizializzazione variabili
*
  a=xnodi(0);
  b=xnodi(n);
  h=(b-a)/float(n);
  sumI=0;
  do i=1,n-1
    sumI=sumI+ynodi(i);
  enddo
  Intf=h*0.5*(ynodi(0)+2*sumI+ynodi(n))
*
* Stampa del risultato
*
  write (*,*) 'Integrale approssimato:', Intf
*
* Fine del programma
*
  stop
  end
```

37

Riferimenti bibliografici

L. Gori, *Calcolo Numerico*: Cap. 7 §§ 7.1, 7.3 (escluse formule di Newton-Cotes aperte), 7.4, 7.5 (escluso metodo di Romberg), 7.9

L. Gori, M.L. Lo Cascio, F. Pitolli, *Esercizi di Calcolo Numerico*: 4.2, 4.3, 4.4, 4.9, 4.10, 4.12, 7.3, 7.8, 7.17, 7.23, 7.28, 7.42, 7.47, 7.48, 7.71, 7.82, 7.84

38