CALCOLO NUMERICO con ELEMENTI DI PROGRAMMAZIONE

(Laurea in Ing. per l'Ambiente e il Territorio)

Prof. Francesca Pitolli

(Esercizi su Equazioni differenziali

1. Dato il problema differenziale

$$\begin{cases} y' = x^2 - y^2, & x > 1\,, \\ y(1) = 3\,, \end{cases}$$

verificare l'esistenza e unicità della soluzione nell'intervallo $I = [1,3]$ sapendo che $1.5 \leq y(x) \leq 3$ per $x \in I$.

Scrivere uno schema numerico del primo ordine adatto ad approssimare $y(x)$ per $x \in I$ specificando le condizioni che garantiscono la convergenza del metodo.

2. Dato il problema differenziale

$$\begin{cases} y' = 2\sin(x+y) + y, & x > 0\,, \\ y(0) = 0\,, \end{cases}$$

verificare l'esistenza e unicità della soluzione nell'intervallo $I = [0,2]$.

Scrivere uno schema numerico di ordine maggiore del primo adatto ad approssimare $y(x)$ per $x \in I$ specificando le condizioni che garantiscono la convergenza del metodo.

3. Dato il problema differenziale

$$\begin{cases} y' = -y + x, & x > 0\,, \\ y(0) = 1\,, \end{cases}$$

verificare l'esistenza e unicità della soluzione nell'intervallo $I = [0,1]$. Sapendo che per gli errori di arrotondamento sui dati vale la maggiorazione $|\eta_i| \leq \eta = 0.5 \cdot 10^{-7}$ e che $|y''(x)| \leq 2$ per $x \in I$, determinare il passo ottimo del metodo di Eulero e dare una maggiorazione in modulo dell'errore globale in $x = 1$ quando il passo di discretizzazione è pari al passo ottimo.

4. Dato il problema differenziale

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 0, & x > 0\,, \\ y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0\,, \end{cases}$$

scrivere uno schema numerico del primo ordine adatto ad approssimare la soluzione nell'intervallo [0,4].

5. Dato il problema differenziale

$$\begin{cases} -x^2\, y'' - 2\,x\,y' + 2y = -4\,x^2, & 1 \leq x \leq 2\,, \\ y(1) = 0, \quad y(2) = 2\,, \end{cases}$$

verificare l'esistenza e unicità della soluzione e scrivere uno schema numerico per approssimarla. Specificare le condizioni che garantiscono la convergenza del metodo.

6. Dato il problema differenziale

$$\begin{cases} -e^x\, y'' - e^x\, y' + e^x\, y = x + (2-x)e^x, & 0 \le x \le 1\,, \\ y(1) = 0, \quad y(2) = 0\,, \end{cases}$$

verificare l'esistenza e unicità della soluzione e scrivere uno schema numerico per approssimarla. Specificare le condizioni che garantiscono la convergenza del metodo.

7. Si consideri il problema differenziale

$$\begin{cases} x^2\, y'' - 2\,x\,y' + 2\,y = x^2\, \sin(\log x)\,, & 1 < x < 2\,, \\ \\ y(1) = 1\,, \quad y(2) = 2\,. \end{cases}$$

Sapendo che $|y^{(3)}(x)| \le 1.2$ e $|y^{(4)}(x)| \le 1$ per $x \in [1,2]$, dare una maggiorazione del modulo dell'errore globale di troncamento in $x = 1.5$.

8. Scrivere uno schema numerico per approssimare la soluzione del problema differenziale

$$\begin{cases} y'' = 2\,y^3 - 6\,y' - 2\,x^3, & 1 \le x \le 2\,, \\ \\ y(1) = 2, \quad y(2) = \frac{5}{2}\,, \end{cases}$$

specificando le condizioni che ne garantiscono la convergenza.

9. Dato il problema differenziale

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 4\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, & x \in \mathbb{R}\,, \quad t > 0 \\ \\ u(x,0) = \sin x\,, & x \in \mathbb{R}\,, \end{cases}$$

determinare l'equazione delle linee caratteristiche.

Scrivere uno schema numerico per approssimare la soluzione specificando le condizioni che ne garantiscono la convergenza.