Corsi del S.S.D. MAT08 - Analisi Numerica
(Laurea Triennale e Laurea Magistrale in Ingegneria)

PROBLEMI AI LIMITI PER
EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

Metodi alle differenze finite

Prof. F. Pitolli, A.A 2010-2011

1 Problemi ai limiti

Molti problemi applicativi danno luogo a modelli matematici in cui le grandezze che intervengono dipendono dalla posizione piuttosto che dal tempo. Nel caso in cui il fenomeno in esame sia descritto da un'equazione differenziale ordinaria il modello deve essere completato con *condizioni al bordo*, cioè condizioni imposte in più punti.

Esempio
Un problema comune in ingegneria civile riguarda la deflessione di una trave orizzontale di sezione rettangolare soggetta a un carico uniforme mentre gli estremi della trave sono fissi. Il problema è descritto dall'equazione differenziale non lineare

$$[1+(w'(x))^2]^{-3/2}\frac{d^2w}{dx^2}=\frac{S}{EI}w(x)+\frac{qx}{2EI}(x-l)\,,\qquad 0<x<l\,,$$

dove $w(x)$ è la deflessione; x è la distanza dall'estremo sinistro della trave; l, q, E, S e I rappresentano, rispettivamente, la lunghezza della trave, l'intensità del carico, il modulo di elasticità , la tensione agli estremi della trave e il momento principale di inerzia.
All'equazione differenziale sono associate le condizioni al bordo

$$w(0)=w(l)=0\,.$$

Se si trascurano i termini del secondo ordine il problema differenziale diventa lineare

$$\frac{d^2w}{dx^2}=\frac{S}{EI}w(x)+\frac{qx}{2EI}(x-l)\,,\qquad 0<x<l\,,$$

e si può risolvere esattamente quando la sbarra ha spessore uniforme in quanto il prodotto EI è costante. In molte applicazioni però lo spessore non è uniforme quindi il momento di inerzia I è una funzione di x e il problema può essere risolto solo tramite un metodo numerico.

Considereremo qui metodi numerici per la soluzione di equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine del tipo

$$y'' = f(x, y, y') \,, \qquad a < x < b \,, \tag{1.1}$$

con condizioni al bordo

$$y(a) = \alpha \,, \qquad y(b) = \beta \,. \tag{1.2}$$

Teorema 1.1. *Assumiamo che $f(x, y, z)$ soddisfi le ipotesi seguenti:*

i) f e le sue derivate parziali $f_y \equiv \frac{\partial f}{\partial y}$ e $f_z \equiv \frac{\partial f}{\partial z}$ sono continue nel dominio

$$D := \{(x, y, z) | a \le x \le b, -\infty < y, z < \infty\};$$

ii) $f_y(x, y, z) > 0$ in D;

iii) esistono due costanti positive K e L tali che

$$K = \max_{(x,y,z)\in D} f_y(x, y, z) \,, \qquad L = \max_{(x,y,z)\in D} |f_z(x, y, z)| \,.$$

Allora la soluzione del problema differenziale ai limiti (1.1)-(1.2) esiste ed è unica.

Se $f(x, y, y')$ ha la forma

$$f(x, y, y') = p(x)\, y'(x) + q(x)\, y(x) - r(x) \,,$$

il problema differenziale (1.1)-(1.2) si riduce al problema lineare

$$\begin{cases} y'' = p(x)\, y' + q(x)\, y - r(x) \,, \qquad a < x < b \,, \\ \\ y(a) = \alpha \,, \qquad y(b) = \beta \,. \end{cases} \tag{1.3}$$

Corollario 1.2. *Assumiamo che*

i) $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ siano continue in $[a, b]$;

ii) $q(x) > 0$ per $x \in [a, b]$.

Allora, la soluzione del problema differenziale ai limiti (1.3) esiste ed è unica.

Nel seguito faremo uso dell'*operatore differenziale non lineare*

$$\mathcal{L}\, y := -y'' + f(x, y, y') \,, \tag{1.4}$$

e dell'*operatore differenziale lineare*

$$\mathcal{K}\, y := -y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y \,. \tag{1.5}$$

Utilizzando le (1.4)-(1.5) l'equazione differenziale (1.1) può essere scritta come

$$(\mathcal{L}\, y)(x) = 0 \,, \tag{1.6}$$

mentre l'equazione differenziale lineare (1.3) diventa

$$(\mathcal{K}\, y)(x) = r(x) \,. \tag{1.7}$$

2 Metodi alle differenze finite

I *metodi alle differenze finite* consistono nell'approssimare ciascuna derivata che compare nelle equazioni differenziali (1.1) o (1.3) con una opportuna formula alle differenze finite.

Prima di tutto introduciamo una *discretizzazione* dell'intervallo $[a, b]$ dividendolo in $N + 1$ sottointervalli uguali, cioè introduciamo i *nodi equispaziati*

$$x_i = a + ih, \qquad i = 0, 1, \ldots, N + 1, \qquad h = \frac{b - a}{N + 1}. \tag{2.1}$$

Nei nodi *interni* x_i, $i = 1, \ldots, N$, l'equazione differenziale (1.1) diventa

$$(\mathcal{L}\, y)(x_i) = -y''(x_i) + f(x_i, y(x_i), y'(x_i)) = 0\,; \tag{2.2}$$

nel caso lineare, la (1.3) diventa

$$(\mathcal{K}\, y)(x_i) = -y''(x_i) + p(x_i)\, y'(x_i) + q(x_i)\, y(x_i) = r(x_i). \tag{2.3}$$

Per risolvere numericamente i problemi differenziali (2.2) e (2.3) è necessario approssimare sia $y'(x_i)$ che $y''(x_i)$. L'approssimazione viene scelta in modo che sia garantito uno specifico ordine nell'errore di troncamento.

Supponendo che $y \in C^3[x_{i-1}, x_{i+1}]$, si può ricorrere allo sviluppo in serie di Taylor di ordine 2 per approssimare $y(x_{i+1})$ e $y(x_{i-1})$:

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) \quad &= y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{1}{2!}h^2 y''(x_i) + \frac{1}{3!}h^3 y^{(3)}(\eta_i^+), \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \eta_i^+ \in (x_i, x_{i+1}), \\ y(x_{i-1}) \quad &= y(x_i - h) = y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{1}{2!}h^2 y''(x_i) - \frac{1}{3!}h^3 y^{(3)}(\eta_i^-), \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \eta_i^- \in (x_{i-1}, x_i). \end{aligned}$$

Sottraendo la seconda equazione alla prima e usando il teorema della media

$$y^{(3)}(\eta_i^+) + y^{(3)}(\eta_i^-) = 2\, y^{(3)}(\eta_i)\,, \qquad \eta_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})\,,$$

si ottiene la formula alle *differenze finite centrate* per $y'(x_i)$

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} - \frac{h^2}{6} y^{(3)}(\eta_i), \qquad \eta_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})\,, \tag{2.4}$$

il cui *errore di troncamento* è dato da

$$\tau(x_i; h; y) = y'(x_i) - \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} = -\frac{h^2}{6} y^{(3)}(\eta_i) = O(h^2). \tag{2.5}$$

Per approssimare $y''(x_i)$ si utilizza lo sviluppo in serie di Taylor di ordine 3, purché $y \in C^4[x_{i-1}, x_{i+1}]$:

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) = y(x_i + h) &= y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{1}{2!}h^2 y''(x_i) + \frac{1}{3!}h^3 y^{(3)}(x_i) + \\ &\quad + \frac{1}{4!}h^4 y^{(4)}(\xi_i^+), \qquad \xi_i^+ \in (x_i, x_{i+1}), \\ y(x_{i-1}) = y(x_i - h) &= y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{1}{2!}h^2 y''(x_i) - \frac{1}{3!}h^3 y^{(3)}(x_i) + \\ &\quad + \frac{1}{4!}h^4 y^{(4)}(\xi_i^-), \qquad \xi_i^- \in (x_{i-1}, x_i). \end{aligned}$$

Sommando le due equazioni e usando il teorema della media

$$y^{(4)}(\xi_i^+) + y^{(4)}(\xi_i^-) = 2\,y^{(4)}(\xi_i)\,, \qquad \xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})\,,$$

si ottiene la formula alle *differenze finite centrate* per $y''(x_i)$

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} - \frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi_i), \qquad \xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1}). \tag{2.6}$$

il cui *errore di troncamento* è dato da

$$\tau(x_i; h; y) = y''(x_i) - \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} = -\frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi_i) = O(h^2). \tag{2.7}$$

2.1 Metodo alle differenze finite non lineari

Sostituendo le formule alle differenze finite centrate (2.4) e (2.6) nell'equazione (2.2) si ha

$$\begin{aligned} &-\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} + \frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi_i) + \\ &\qquad + f\left(x_i, y(x_i), \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} - \frac{h^2}{6} y^{(3)}(\eta_i)\right) = 0\,. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Il *metodo alle differenze finite non lineare* si ottiene trascurando nella (2.8), che è una relazione esatta, gli errori di troncamento (2.5) e (2.7) relativi alle formule alle differenze finite, e sostituendo al valore esatto $y(x_i)$ il valore approssimato y_i. Tenendo conto delle condizioni al bordo (1.2), lo schema numerico diventa

$$\begin{cases} y_0 = \alpha, \qquad y_{N+1} = \beta, \\ -\dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + f\left(x_i, y_i, \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right) = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \tag{2.9}$$

Quindi, per trovare la soluzione approssimata $\{y_i\}_{i=1}^N$, si deve risolvere il *sistema non lineare* (di N equazioni nelle N incognite $y_1, y_2, \dots, y_N$)

$$
\begin{cases}
-\alpha + 2y_1 - y_2 + h^2 f\left(x_1, y_1, \dfrac{y_2 - \alpha}{2h}\right) = 0\,, \\[2ex]
-y_1 + 2y_2 - y_3 + h^2 f\left(x_2, y_2, \dfrac{y_3 - y_1}{2h}\right) = 0\,, \\[2ex]
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\[2ex]
-y_{N-2} + 2y_{N-1} - y_N + h^2 f\left(x_{N-1}, y_{N-1}, \dfrac{y_N - y_{N-2}}{2h}\right) = 0, \\[2ex]
-y_{N-1} + 2y_N - \beta + h^2 f\left(x_N, y_N, \dfrac{\beta - y_{N-1}}{2h}\right) = 0\,.
\end{cases}
\tag{2.10}
$$

Prima di passare alla soluzione numerica del sistema non lineare (2.10) si deve verificare se lo schema alle differenze finite costruito è *convergente*, cioè se

$$
\lim_{h\to 0} \max_{1\le i\le N} |e_i| = 0\,, \tag{2.11}
$$

dove

$$
e_i := y(x_i) - y_i
$$

è l'*errore globale di troncamento*. Come nel caso dei metodi per la soluzione di problemi ai valori iniziali, la *convergenza* è assicurata se lo schema numerico è *consistente* e *stabile*.

Per studiare la consistenza e la stabilità dello schema alle differenze finite non lineare introduciamo l'*operatore differenziale discreto* (non lineare) $(\mathcal{L}_h\, v_d)_i$ che agisce su una funzione discreta $v_d = \{v_i\}_{i=0}^{N+1}$, associata alla discretizzazione (2.1), secondo lo schema alle differenze (2.9):

$$
(\mathcal{L}_h\, v_d)_i := -\frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} + f\left(x_i, v_i, \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h}\right)\,. \tag{2.12}
$$

Allora lo schema numerico (2.9) diventa

$$
\begin{cases}
y_0 = \alpha, \qquad y_{N+1} = \beta\,, \\[2ex]
(\mathcal{L}_h\, y_d)_i = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, N\,,
\end{cases}
\tag{2.13}
$$

dove $y_d = \{y_i\}_{i=0}^{N+1}$.

Tramite la soluzione esatta $y(x)$ si può definire la funzione discreta $y_e := \{y(x_i)\}_{i=0}^{N+1}$; allora,

$$
(\mathcal{L}_h\, y_e)_i = -\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} + f\left(x_i, y(x_i), \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h}\right) \tag{2.14}
$$

rappresenta l'operatore discreto che agisce sulla soluzione esatta.

In ciascun nodo, l'*errore locale di troncamento* dello schema numerico è definito come la differenza tra l'operatore differenziale esatto $(\mathcal{L}\, y)(x_i)$ e l'operatore differenziale discreto applicato alla soluzione esatta $(\mathcal{L}_h\, y_e)_i$:

$$R(x_i, y(x_i); h; y; f) := (\mathcal{L}\, y)(x_i) - (\mathcal{L}_h\, y_e)_i\,. \tag{2.15}$$

Utilizzando la relazione esatta (2.8), l'*operatore differenziale* esatto può essere scritto come

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}\, y)(x_i) &= -y''(x_i) + f(x_i, y(x_i), y'(x_i)) = \\
&= -\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} + \frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi_i) + \\
&+ f\left(x_i, y(x_i), \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} - \frac{h^2}{6} y^{(3)}(\eta_i)\right) = \\
&= -\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} + \frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi_i) + \\
&+ f\left(x_i, y(x_i), \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h}\right) - f_z\left(x_i, y(x_i), \zeta_i\right) \frac{h^2}{6} y^{(3)}(\eta_i)\,,
\end{aligned} \tag{2.16}$$

dove, nell'ultima uguaglianza, si è utilizzato lo sviluppo in serie di Taylor di

$$f\left(x_i, y(x_i), \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} - \frac{h^2}{6} y^{(3)}(\eta_i)\right)$$

nella terza variabile con punto iniziale $\dfrac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h}$; ζ_i è un valore incognito compreso tra $y'(x_i) = \dfrac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} - \dfrac{h^2}{6} y^{(3)}(\eta_i)$ e $\dfrac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h}$.

Sostituendo la (2.14) e l'ultima delle (2.16) nella definizione (2.15), per l'errore locale di troncamento si ottiene l'espressione

$$R(x_i, y(x_i); h; y; f) = -f_z(x_i, y(x_i), \zeta_i) \frac{h^2}{6} y^{(3)}(\eta_i) + \frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi_i)\,, \tag{2.17}$$

dove η_i e ξ_i sono due punti incogniti nell'intervallo $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ e ζ_i è un valore incognito compreso tra $y'(x_i) = \dfrac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} - \dfrac{h^2}{6} y^{(3)}(\eta_i)$ e $\dfrac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h}$.

Dalle (2.15) e (2.17) si ottiene per l'operatore differenziale esatto l'espressione

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}\, y)(x_i) &= (\mathcal{L}_h\, y_e)_i + R(x_i, y(x_i); h; y; f) = \\
&= (\mathcal{L}_h\, y_e)_i - f_z(x_i, y(x_i), \zeta_i) \frac{h^2}{6} y^{(3)}(\eta_i) + \frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi_i)\,,
\end{aligned} \tag{2.18}$$

che indica come l'errore locale di trocamento rappresenti l'errore commesso localmente dallo schema numerico a causa dell'approssimazione delle derivate con le differenze finite.

Poiché $R(x_i, y(x_i); h; y; f) = O(h^2)$, il metodo è *consistente* e del *secondo ordine*; inoltre è esatto per tutti i polinomi di grado ≤ 2.

Per quanto riguarda la stabilità , nel caso di operatori discreti non lineari si può dare la seguente definizione.

Definizione 2.1. *Uno schema alle differenze finite non lineare è detto stabile se, date due funzioni discrete* $v_d = \{v_i\}_{i=0}^{N+1}$ *e* $u_d = \{u_i\}_{i=0}^{N+1}$*, definite sulla discretizzazione (2.1), esiste una costante* M *tale che*

$$\begin{aligned} \max_{0\leq i\leq N+1} |v_i - u_i| \quad &\leq M\Big\{ \max\left(|v_0 - u_0|, |v_{N+1} - u_{N+1}|\right) + \\ &+ \max_{1\leq i\leq N} |(\mathcal{L}_h\, v_d)_i - (\mathcal{L}_h\, u_d)_i| \Big\}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

La stabilità è una proprietà dello schema numerico e rappresenta la capacità dello schema di non amplificare "troppo" le perturbazioni. Infatti, se con $y_d = \{y_i\}_{i=0}^{N+1}$ indichiamo la soluzione del problema discreto (2.13), e con $y_d^\varepsilon = \{y_i^\varepsilon\}_{i=0}^{N+1}$ la soluzione del problema discreto perturbato

$$\begin{cases} y_0^\varepsilon = y(x_0) + \varepsilon_0\,, \qquad y_{N+1}^\varepsilon = y(x_{N+1}) + \varepsilon_{N+1}\,, \\ (\mathcal{L}_h y_d^\varepsilon)_i = \varepsilon_i\,, \end{cases}$$

dalla disuguaglianza (2.19) si deduce che la perturbazione sulla soluzione $\delta_i = y_i - y_i^\varepsilon$ si mantiene limitata, infatti

$$\max_{0\leq i\leq N+1} |\delta_i\,| = \max_{0\leq i\leq N+1} |y_i - y_i^\varepsilon| \leq M \left\{ \max(|\epsilon_0|, |\epsilon_{N+1}|) + \max_{1\leq i\leq N} |\epsilon_i| \right\}. \tag{2.20}$$

Per lo schema alle differenze finite non lineari vale il teorema seguente.

Teorema 2.1. *Siano* $L = \max_{(x,y,z)\in D} |f_z(x, y, z)|$ *e* $0 < Q = \min_{(x,y,z)\in D} f_y(x, y, z)$*. Se* $h\,L \leq 2$*, allora lo schema alle differenze finite non lineari (2.13) è stabile con* $M = \max(1, 1/Q)$.

Per il teorema di Lax, la consistenza e la stabilità implicano la *convergenza* dello schema alle differenze finite. Osserviamo che la convergenza è *condizionata* poiché dal Teorema 2.1 segue una limitazione per il passo di integrazione in quanto risulta

$$h \leq \frac{2}{L}\,.$$

La stabilità fornisce anche una limitazione dell'errore globale. Infatti utilizzando nella disuguaglianza (2.19) le funzioni discrete $y_e = \{y(x_i)\}_{i=0}^{N+1}$ e $y_d = \{y_i\}_{i=0}^{N+1}$ e tenendo conto di (1.6), (2.13) e (2.18) si ottiene

$$
\begin{aligned}
\max_{0\le i\le N+1} |e_i| &= \max_{0\le i\le N+1} |y(x_i) - y_i| \le \\
&\le M \max_{1\le i\le N} |(\mathcal{L}_h\, y_e)_i - \underbrace{(\mathcal{L}_h\, y_d)_i}_{\overset{(2.13)}{=}0}| = \\
&\overset{(2.18)}{=} M \max_{1\le i\le N} |\underbrace{(\mathcal{L}\, y)(x_i)}_{\overset{(1.6)}{=}0} - R(x_i, y(x_i); h; f)| = \\
&= M \max_{1\le i\le N} |R(x_i, y(x_i); h; f)|\,.
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

Quindi l'errore globale è limitato dall'errore locale di troncamento.

2.1.1 Soluzione del sistema non lineare

Se valgono le ipotesi del Teorema 1.1 e se $h\,L \le 2$, si dimostra che il sistema non lineare (2.10) ha un'unica soluzione $Y = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$ che può essere approssimata con il *metodo di Newton* (cfr. successivo §3 e §3.10 di [4]).
Il metodo di Newton consiste nel generare una successione di approssimazioni

$$Y^{(k)} = [y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \dots, y_N^{(k)}]^T\,, \qquad k = 1, 2, ...$$

a partire da una *approssimazione iniziale* $Y^{(0)} = [y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_N^{(0)}]^T$. Se $Y^{(0)}$ è abbastanza "vicina" alla soluzione e la matrice Jacobiana del sistema è regolare, allora la successione delle approssimazioni converge alla soluzione esatta. La matrice Jacobiana

$$J(y_1, \dots, y_n) = [J(y_1, \dots, y_n)]_{i,j=1,\dots,n} = \left[\frac{\partial\, g_i(y_1, \dots, y_n)}{\partial\, y_j}\right]_{i,j=1,\dots,n}$$

delle n funzioni

$$
\begin{cases}
g_1(y_1, \dots, y_n) = -\alpha + 2y_1 - y_2 + h^2 f\left(x_1, y_1, \dfrac{y_2 - \alpha}{2h}\right)\,, \\[2ex]
g_2(y_1, \dots, y_n) = -y_1 + 2y_2 - y_3 + h^2 f\left(x_2, y_2, \dfrac{y_3 - y_1}{2h}\right)\,, \\[2ex]
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\[2ex]
g_{n-1}(y_1, \dots, y_n) = -y_{N-2} + 2y_{N-1} - y_N + h^2 f\left(x_{N-1}, y_{N-1}, \dfrac{y_N - y_{N-2}}{2h}\right)\,, \\[2ex]
g_n(y_1, \dots, y_n) = -y_{N-1} + 2y_N - \beta + h^2 f\left(x_N, y_N, \dfrac{\beta - y_{N-1}}{2h}\right)\,,
\end{cases}
\tag{2.22}
$$

è una matrice tridiagonale i cui elementi non nulli sono dati da

$$[J(y_1,\dots,y_n)]_{ij} = \begin{cases} -1+\dfrac{h}{2}f_z\left(x_i,y_i,\dfrac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}\right), & j=i+1, i=1,\dots,N-1, \\ \\ 2+h^2 f_y\left(x_i,y_i,\dfrac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}\right), & j=i, i=1,\dots,N, \\ \\ -1-\dfrac{h}{2}f_z\left(x_i,y_i,\dfrac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}\right), & j=i-1, i=2,\dots,N, \end{cases}$$

con $y_0=\alpha$ e $y_{N+1}=\beta$. Definiamo inoltre il vettore

$$\begin{aligned} B(y_1^{(k)},\dots,y_n^{(k)}) = \Big[\quad & -2y_1^{(k)}+y_2^{(k)}+\alpha-h^2 f\left(x_1,y_1^{(k)},\frac{y_2^{(k)}-\alpha}{2h}\right), \\ & y_1^{(k)}-2y_2^{(k)}+y_3^{(k)}-h^2 f\left(x_2,y_2^{(k)},\frac{y_3^{(k)}-y_1^{(k)}}{2h}\right),\dots \\ & \dots, y_{N-2}^{(k)}-2y_{N-1}^{(k)}+y_N^{(k)}-h^2 f\left(x_{N-1},y_{N-1}^{(k)},\frac{y_N^{(k)}-y_{N-2}^{(k)}}{2h}\right), \\ & y_{N-1}^{(k)}-2y_N^{(k)}+\beta-h^2 f\left(x_N,y_N^{(k)},\frac{\beta-y_{N-1}^{(k)}}{2h}\right) \quad \Big]^T. \end{aligned}$$

Allora, l'algoritmo del metodo di Newton genera la successione della approssimazioni $Y^{(k)} = [y_1^{(k)},y_2^{(k)},\dots,y_N^{(k)}]^T$, $k=0,1,\dots$, come segue:

$$\begin{cases} \text{Sia} \quad Y^{(0)} \quad \text{un'approssimazione iniziale} \\ \\ \text{Per} \quad k=0,1,\dots, \\ \\ \qquad \text{Calcolare la matrice} \quad J(y_1^{(k)},\dots,y_n^{(k)}) \quad \text{e il vettore} \quad B(y_1^{(k)},\dots,y_n^{(k)}) \\ \\ \qquad \text{Risolvere il sistema lineare} \quad J(y_1^{(k)},\dots,y_n^{(k)})\,V = B(y_1^{(k)},\dots,y_n^{(k)}) \\ \\ \qquad\qquad \text{nell'incognita} \quad V=[v_1,\dots,v_n]^T \\ \\ \qquad \text{Calcolare la nuova approssimazione} \quad Y^{(k+1)} = Y^{(k)}+V \end{cases}$$

Poiché la matrice Jacobiana è tridiagonale, il sistema lineare può essere risolto in modo efficiente, ad esempio con il metodo di Thomas (cfr. [4], §4.12). Inoltre, nella pratica le iterazioni si

arrestano quando $\|Y^{(k)} - Y^{(k-1)}\|$ è minore di una tolleranza prefissata.
L'approssimazione iniziale $Y^{(0)}$ può essere ottenuta costruendo la retta che congiunge i punti (a, α) e (b, β), cioè ponendo

$$y_i^{(0)} = \alpha + i \left(\frac{\beta - \alpha}{b - a} \right) h, \qquad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Osserviamo che, anche se l'approssimazione può essere migliorata riducendo il passo h, non conviene sceglierlo troppo piccolo a causa dell'instabilità che si produce nell'approssimare le derivate con le differenze finite (cfr. §6.15 di [4]).

Esempio 2.1

Consideriamo il problema ai limiti non lineare

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy'), & 1 \leq x \leq 3, \\ y(1) = 17, \qquad y(3) = \dfrac{43}{3}. \end{cases}$$

Applicando il metodo alle differenze finite non lineare con passo $h = 0.1$ e nodi $x_i = 1.0 + ih$, $i = 0, 1, \ldots, 20$, si ottiene il sistema non lineare

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + h^2 \dfrac{1}{8} \left(32 + 2x_1^3 - y_1 \dfrac{y_2 - \alpha}{2h} \right) - \alpha = 0, \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 + h^2 \dfrac{1}{8} \left(32 + 2x_2^3 - y_2 \dfrac{y_3 - y_1}{2h} \right) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -y_{N-2} + 2y_{N-1} - y_N + h^2 \dfrac{1}{8} \left(32 + 2x_{N-1}^3 - y_{N-1} \dfrac{y_N - y_{N-2}}{2h} \right) = 0, \\ -y_{N-1} + 2y_N + h^2 \dfrac{1}{8} \left(32 + 2x_N^3 - y_N \dfrac{\beta - y_{N-1}}{2h} \right) - \beta = 0, \end{cases}$$

la cui matrice Jacobiana è

$$[J(y_1, \ldots, y_n)]_{ij} = \begin{cases} -1 - \dfrac{h}{2} \dfrac{y_i}{8}, & i = j - 1, j = 2, \ldots, N, \\ 2 - \dfrac{h}{2} \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{8}, & i = j, j = 1, \ldots, N, \\ -1 + \dfrac{h}{2} \dfrac{y_i}{8}, & i = j + 1, j = 1, \ldots, N - 1. \end{cases}$$

Nella tabella di seguito è riportata la soluzione approssimata ottenuta con il metodo di Newton utilizzando come criterio di arresto $\max_{1 \le x \le 20} |y_i^{(k+1)} - y_i^{(k)}| \le 10^{-8}$; per confronto è riportata anche la soluzione esatta.

L'approssimazione può essere migliorata tramite l'estrapolazione di Richardson. Se con $y_i^{(h)}$ indichiamo l'approssimazione ottenuta con passo di integrazione h, l'estrapolazione di Richardson si applica avendo le tre approssimazioni con passo h, $h/2$ e $h/4$:

$$\text{Prima estrapolazione:} \qquad y_i^{E_1} = \frac{4y_i^{(h/2)} - y_i^{(h)}}{3}, \quad i = 1, \ldots, N,$$

$$\text{Seconda estrapolazione:} \qquad y_i^{E_2} = \frac{4y_i^{(h/4)} - y_i^{(h/2)}}{3}, \quad i = 1, \ldots, N,$$

$$\text{Estrapolazione finale:} \qquad y_i^{E_3} = \frac{16y_i^{E_2} - y_i^{E_1}}{15}, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Utilizzando come passo iniziale $h = 0.1$, l'approssimazione $y_i^{E_3}$ ha un errore massimo di $3.68 \cdot 10^{-10}$.

i	x_i	y_i	$y(x_i)$	$\|y(x_i) - y_i\|$
0	1.0	17.000000	17.000000	
1	1.1	15.754503	15.755455	9.520×10^{-4}
2	1.2	14.771740	14.773333	1.594×10^{-3}
3	1.3	13.995677	13.997692	2.015×10^{-3}
4	1.4	13.386297	13.388571	2.275×10^{-3}
5	1.5	12.914252	12.916667	2.414×10^{-3}
6	1.6	12.557538	12.560000	2.462×10^{-3}
7	1.7	12.299326	12.301765	2.438×10^{-3}
8	1.8	12.126529	12.128889	2.360×10^{-3}
9	1.9	12.028814	12.031053	2.239×10^{-3}
10	2.0	11.997915	12.000000	2.085×10^{-3}
11	2.1	12.027142	12.029048	1.905×10^{-3}
12	2.2	12.111020	12.112727	1.707×10^{-3}
13	2.3	12.245025	12.246522	1.497×10^{-3}
14	2.4	12.425388	12.426667	1.278×10^{-3}
15	2.5	12.648944	12.650000	1.056×10^{-3}
16	2.6	12.913013	12.913846	8.335×10^{-3}
17	2.7	13.215312	13.215926	6.142×10^{-4}
18	2.8	13.553885	13.554286	4.006×10^{-4}
19	2.9	13.927046	13.927241	1.953×10^{-4}
20	3.0	14.333333	14.333333	

Esercizio 2.1
Approssimare la deflessione di una trave d'acciaio lunga 120 cm con lo schema alle differenze finite non lineare. Le caratteristiche della trave sono: $q = 100$ kg/m, $E = 3.0 \times 10^7$ kg/cm^2, $S = 1000$ kg, $I = 625$ cm^4.

2.2 Metodo alle differenze finite lineari

Sostituendo le formule alle differenze finite centrate (2.4) e (2.6) nell'equazione lineare (2.3) si ha

$$\begin{aligned} -\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} & +p(x_i)\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} + q(x_i)y(x_i)+ \\ & -\frac{h^2}{6}p(x_i)y^{(3)}(\eta_i) + \frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_i) = r(x_i)\,, \end{aligned} \tag{2.23}$$

che da luogo allo *schema alle differenze finite lineare*

$$\begin{cases} y_0 = \alpha, \qquad y_{N+1} = \beta, \\ -\dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p(x_i)\dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q(x_i)y_i = r(x_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \end{cases}$$

In modo analogo a quanto fatto nel caso non lineare, definiamo l'*operatore differenziale discreto* (lineare) che agisce su una funzione discreta $v_d = \{v_i\}_{i=0}^{N+1}$:

$$(\mathcal{K}_h\, v_d)_i := -\frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} + p(x_i)\frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h} + q(x_i)v_i\,, \tag{2.24}$$

cosicché lo schema numerico per la soluzione approssimata $y_d = \{y_i\}_{i=0}^{N+1}$ diventa

$$\begin{cases} y_0 = \alpha, \qquad y_{N+1} = \beta, \\ (\mathcal{K}_h\, y_d)_i = r(x_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, N\,. \end{cases} \tag{2.25}$$

Allora l'operatore discreto $(\mathcal{K}_h\, y_e)_i$ che agisce sulla soluzione esatta discreta $y_e = \{y(x_i)\}_{i=0}^{N+1}$ è dato da

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}_h\, y_e)_i &= -\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} + p(x_i)\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} + q(x_i)y(x_i) = \\ &= (\mathcal{K}\, y)(x_i) + \frac{h^2}{6}p(x_i)y^{(3)}(\eta_i) - \frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_i)]\,, \end{aligned} \tag{2.26}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalle (2.3) e (2.23). L'errore locale di troncamento dello schema numerico è

$$\begin{aligned} R(x_i, y(x_i); h; y; f) &= (\mathcal{K}\, y)(x_i) - (\mathcal{K}_h\, y_e)_i = \\ &= -\frac{h^2}{6}p(x_i)y^{(3)}(\eta_i) + \frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_i)\,. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Poiché $R(x_i, y(x_i); h; y; f) = O(h^2)$, il metodo alle differenze finite lineare è *consistente* e del *secondo ordine*; inoltre è esatto per tutti i polinomi di grado ≤ 2.

Definizione 2.2. *Uno schema alle differenze finite lineare è detto stabile se, data una funzione discreta $v_d = \{v_i\}_{i=0}^{N+1}$, definita sulla discretizzazione (2.1), esiste una costante M tale che*

$$\max_{0\leq i\leq N+1} |v_i| \leq M \left\{ \max\left(|v_0|, |v_{N+1}|\right) + \max_{1\leq i\leq N} |(\mathcal{K}_h\, v_d)_i| \right\}. \tag{2.28}$$

Teorema 2.2. *Siano $L = \max_{a\leq x\leq b} |p(x)|$ e $0 < Q = \min_{a\leq x\leq b} q(x)$. Se $h\,L \leq 2$, allora lo schema alle differenze finite lineari è stabile con $M = \max(1, 1/Q)$.*

Per il teorema di Lax, la consistenza e la stabilità implicano la *convergenza condizionata* dello schema lineare e inoltre per l'errore globale di troncamento si ha la limitazione

$$\begin{aligned}
\max_{0\leq i\leq N+1} |e_i| \quad &= \quad \max_{0\leq i\leq N+1} |y(x_i) - y_i| \leq \\
&\leq \quad M \max_{1\leq i\leq N} |(\mathcal{K}_h\,(y_e - y_d))_i| = \\
&= \quad M \max_{1\leq i\leq N} |(\mathcal{K}_h\, y_e)_i - \underbrace{(\mathcal{K}_h y_d)_i}_{\overset{(2.25)}{=} r(x_i)}| = \\
&\overset{(2.27)}{=} \quad M \max_{1\leq i\leq N} |\underbrace{(\mathcal{K}\,y)(x_i)}_{\overset{(2.3)}{=} r(x_i)} - R(x_i, y(x_i); h; y; f) - r(x_i)| \\
&= \quad M \max_{1\leq i\leq N} |R(x_i, y(x_i); h; y; f)|\,.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

In questo caso la soluzione approssimata $Y = [y_1, y_2, \cdots, y_N]^T$ si ottiene risolvendo il *sistema lineare* tridiagonale di N equazioni in N incognite

$$AY = B,$$

dove

$$A = \begin{bmatrix}
2 + h^2 q(x_1) & -1 + \frac{h}{2}p(x_1) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
-1 - \frac{h}{2}p(x_2) & 2 + h^2 q(x_2) & -1 + \frac{h}{2}p(x_2) & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & \cdots & -1 - \frac{h}{2}p(x_{N-1}) & 2 + h^2 q(x_{N-1}) & -1 + \frac{h}{2}p(x_{N-1}) \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 - \frac{h}{2}p(x_N) & 2 + h^2 q(x_N)
\end{bmatrix}$$

e

$$B = \left[h^2 r(x_1) + \left(1 + \frac{h}{2}p(x_1)\right)\alpha, h^2 r(x_2), \ldots, h^2 r(x_{N-1}), h^2 r(x_N) + \left(1 - \frac{h}{2}p(x_N)\right)\beta \right]^T.$$

Se valgono le ipotesi del Teorema 2.2, si dimostra che il sistema tridiagonale ammette un'unica soluzione purché $h\,L \leq 2$.

Esempio 2.2

Consideriamo il problema ai limiti lineare

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{2}{x}y' - \dfrac{2}{x^2}y + \sin(\log x)\,, \quad 1 \leq x \leq 2\,, \\[2ex] y(1) = 1, \qquad y(2) = 2\,, \end{cases}$$

la cui soluzione esatta è

$$y(x) = \frac{x}{2}(4-x) - x(1-x)\Big(\cos(\log 2) + \sin(\log 2)\Big) - \frac{x^2}{2}\Big(\cos(\log x) + \sin(\log x)\Big)\,.$$

Applicando il metodo alle differenze finite lineare si ottiene il sistema lineare tridiagonale

$$\begin{bmatrix} 2-h^2\dfrac{2}{x_1^2} & -1+\dfrac{h}{2}\dfrac{2}{x_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1-\dfrac{h}{2}\dfrac{2}{x_2} & 2-h^2\dfrac{2}{x_2^2} & -1+\dfrac{h}{2}\dfrac{2}{x_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & -1-\dfrac{h}{2}\dfrac{2}{x_8} & 2-h^2\dfrac{2}{x_8^2} & -1+\dfrac{h}{2}\dfrac{2}{x_8} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1-\dfrac{h}{2}\dfrac{2}{x_9} & 2-h^2\dfrac{2}{x_9^2} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} h^2\dfrac{\sin(\log x_1)}{x_1} + \left(1+\dfrac{h}{2}\dfrac{2}{x_1}\right)\alpha \\ h^2\dfrac{\sin(\log x_2)}{x_2} \\ \vdots \\ h^2\dfrac{\sin(\log x_8)}{x_8} \\ h^2\dfrac{\sin(\log x_9)}{x_9} + \left(1-\dfrac{h}{2}\dfrac{2}{x_9}\right)\beta \end{bmatrix}$$

che può essere risolto con il metodo di Thomas. I risultati ottenuti sono riportati nella tabella di seguito.

Anche in questo caso si può utilizzare l'estrapolazione di Richardson per migliorare l'approssimazione.

i	x_i	y_i	$y(x_i)$	$\lvert y_i - y(x_i)\rvert$
0	1.0	1.00000000	1.00000000	
1	1.1	1.08997132	1.09007246	1.01×10^{-4}
2	1.2	1.17916606	1.17935628	1.90×10^{-4}
3	1.3	1.26868985	1.26895130	2.61×10^{-4}
4	1.4	1.35967879	1.35998932	3.10×10^{-4}
5	1.5	1.45328006	1.45361424	3.34×10^{-4}
6	1.6	1.55063840	1.55096828	3.30×10^{-4}
7	1.7	1.65288668	1.65318237	2.96×10^{-4}
8	1.8	1.76113946	1.76136954	2.30×10^{-4}
9	1.9	1.87648855	1.87662038	1.32×10^{-4}
10	2.0	2.00000000	2.00000000	

Esercizio 2.2
Approssimare la deflessione di una trave d'acciaio lunga 120 cm con lo schema alle differenze finite lineare. Le caratteristiche della trave sono: $q = 100$ kg/m, $E = 3.0 \times 10^7$ kg/cm^2, $S = 1000$ kg, $I = 625$ cm^4. Confrontare l'approssimazione ottenuta con quella del problema non lineare dell'Esercizio 2.1.

3 Metodo di Newton per sistemi non lineari

Consideriamo il sistema non lineare

$$F(X) = 0 \tag{3.30}$$

con $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ e $F(X) = [f_1(X), f_2(X), \ldots, f_n(X)]^T$. Una soluzione del sistema (3.30) è un vettore $\bar{X} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n]^T$ tale che

$$F(\bar{X}) = 0.$$

Se le funzioni $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)$, ammettono derivate parziali limitate, allora la soluzione $\bar{X}$ può essere approssimata con il metodo di Newton. Partendo da una approssimazione iniziale $X^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}]^T$, si costruisce una successione di approssimazioni $\{X^{(k)} = [x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}]^T\}$, $k = 1, 2, \ldots$, con un procedimento iterativo del tipo

$$\begin{cases} X^{(0)} & \text{dato,} \\ \\ X^{(k)} = X^{(k-1)} - J(X^{(k-1)})^{-1} F(X^{(k-1)}), & k \geq 1, \end{cases}$$

dove

$$J(X) = \left[\frac{\partial f_i(X)}{\partial x_j} \right]_{i,j=1,2,\ldots,n}$$

è la matrice Jacobiana del sistema (3.30). Se l'approssimazione iniziale è sufficientemente accurata e lo Jacobiano è regolare il metodo è *convergente*, cioè

$$\lim_{k \to \infty} X^{(k)} = \bar{X} \;\Leftrightarrow\; \lim_{k \to \infty} ||\bar{X} - X^{(k)}|| = 0,$$

e la convergenza è *quadratica* nel senso che

$$\lim_{k \to \infty} \frac{||\bar{X} - X^{(k+1)}||}{||\bar{X} - X^{(k)}||^2} = C$$

con C costante positiva.

La difficoltà del metodo di Newton consiste nel fatto che ad ogni passo bisogna invertire la matrice Jacobiana, operazione che richiede un costo computazionale elevato. Per evitare l'inversione di matrice si procede nel modo seguente. Ad ogni passo si risolve il sistema lineare

$$J(X^{(k-1)})\, Y = -F(X^{(k-1)})\,,$$

quindi si calcola la nuova approssimazione $X^{(k)} = X^{(k-1)} + Y$. Il procedimento iterativo viene arrestato quando $||X^{(k)} - X^{(k-1)}|| \leq \epsilon$, dove ϵ è una tolleranza prefissata.

Bibliografia

1. **R.L. Burden, J.D. Faires**, *Numerical Analysis*, Books/Cole Pubbling Company, 1997.
2. **V. Comincioli**, *Analisi Numerica. Metodi, Modelli e Applicazioni*, McGraw-Hill, 1990.
3. **W. Gautschi**, *Numerical Analysis*, Birkhauser, 1997.
4. **L. Gori**, *Calcolo Numerico*, Ed. Kappa, 2006.