Prova scritta di Calcolo delle Probabilità
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica
Docente: Prof. Enzo Orsingher
30 Maggio 2017

Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Esercizio 1.

Un'urna contiene palline bianche e nere in egual proporzione. Si estraggono k palline dall' urna in modo Bernoulliano secondo il seguente schema:

1. si getta un dado e si ottiene il risultato $1 \leq k \leq 6$;
2. si estraggono dall'urna k palline.

Con quale probabilità il numero delle palline bianche è i? Verificare che la somma delle probabilità è 1.

N.B. Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate

Soluzione.

Definiamo le v.a.

$$\begin{aligned} N &= \text{“numero di palline bianche estratte”} \\ D &= \text{“risultato del lancio del dado”} \end{aligned}$$

Per $1 \leq i \leq 6$

$$\begin{aligned} P(N = i) &= \sum_{k=i}^{6} P(N = i | D = k) P(D = k) \\ &= \frac{1}{6} \sum_{k=i}^{6} \binom{k}{i} \frac{1}{2^k} \end{aligned}$$

Perciò

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{6} P(N = i) &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} \sum_{k=i}^{6} \binom{k}{i} \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{2^k} \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{2^k} 2^k \\ &= 1 \end{aligned}$$

Esercizio 2.

Sia data la funzione di densità

$$f(x,y) = \begin{cases} c\,x^2 & 0 < x < 1\,,\ 0 < y < x \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases}$$

(i) Trovare il valore di c.

(ii) Trovare le densità marginali f_X ed f_Y.

(iii) Trovare le densità condizionate $f(x|y)$ e $f(y|x)$.

(iv) Calcolare $\mathbb{E}(X^3|Y = y)$

N.B. Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate

Soluzione.

(i) Si impone la condizione

$$\int_0^1 \int_0^x c\,x^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 1$$

Calcoliamo l'integrale al primo membro.

$$\begin{aligned} c\int_0^1 x^2 \int_0^x \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x &= c\ \frac{x^4}{4}\bigg|_0^1 \\ &= \frac{c}{4} \end{aligned}$$

Perciò

$$\frac{c}{4} = 1 \Rightarrow c = 4$$

(ii) Per $0 < x < 1$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y \\ &= 4\int_0^x x^2\,\mathrm{d}y \\ &= 4x^3 \end{aligned}$$

Per $0 < y < 1$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_y^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x \\ &= 4\int_y^1 x^2\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{3} - \frac{4}{3}y^3 \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} f(x|y) &= \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{4x^2}{\frac{4}{3}(1-y^3)} \quad y < x < 1\,,\ 0 < y < 1 \\ f(y|x) &= \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{4x^2}{4x^3} = \frac{1}{x} \quad 0 < y < x\,,\ 0 < x < 1 \end{aligned}$$

(iv) Per $0 < y < 1$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^3|Y=y) &= \int_y^1 x^3 f(x|y)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{\frac{4}{3}(1-y^3)}\int_y^1 x^5\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}(1+y^3)
\end{aligned}
$$

Esercizio 3.

Siano $X_1, \ldots, X_n$ v.a. indipendenti con distribuzione esponenziale di parametro λ_n. Sia

$$Y_n = nX_n^k$$

(i) Si calcoli la distribuzione di Y_n.

(ii) Se $\lambda_n = n^\alpha\,,\ \alpha > \frac{1}{k}$ trovare il limite in distribuzione.

(iii) Cosa si può dire sul comportamento asintotico delle Y_n per $0 < \alpha < \frac{1}{k}$?

N.B. Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate

Soluzione.

(i) Per $y \geq 0$

$$F_{Y_n}(y) = P(Y_n < y) = P(nX_n^k < y) = P\left(X_n < \left(\frac{y}{n}\right)^{\frac{1}{k}}\right) = 1 - e^{-\lambda_n\left(\frac{y}{n}\right)^{\frac{1}{k}}}$$

(ii) Se $\lambda_n = n^\alpha\,,\ \alpha > \frac{1}{k}$ si ha

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 - e^{-y^{\frac{1}{k}}\, n^{\alpha - \frac{1}{k}}} & y \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 & y \geq 0 \end{cases}$$

cioè Y_n tende ad una v.a. degenere in 0.

(iii) Per $0 < \alpha < \frac{1}{k}$ si ha che $\lim\limits_{n\to\infty} F_{Y_n}(y) = 0\ \forall y \in \mathbb{R}$. Le Y_n pertanto non convergono ad alcuna v.a.