Prova scritta di Calcolo delle Probabilità
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica
Docente: Prof. Enzo Orsingher
17 Luglio 2017

Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Esercizio 1.
Sia N il numero di clienti arrivati allo sportello di una banca durante un'ora di tempo. Se p è la probabilità di essere serviti in un'ora (non si tiene conto dell'ordine di arrivo) e N possiede distribuzione di Poisson di parametro $\lambda > 0$ si calcoli

(i) $P\{$"k clienti siano serviti durante l'ora considerata"$|N = n\}$ $\quad 0 \leq k \leq n$

(ii) $P\{$"k clienti siano serviti durante l'ora considerata"$\}$ $\quad k \geq 0$

N.B. Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate

Soluzione.

(i) Sia

$$X = \text{"numero di clienti serviti durante un'ora di tempo"}$$

Allora si ha che

$$X|N = k \sim Binom(n, p)$$

perciò

$$P\{\text{"}k \text{ clienti siano serviti durante l'ora considerata"}|N = n\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad 0 \leq k \leq n$$

(ii) Essendo $N \sim Pois(\lambda)$ si ha, per $k \geq 0$

$$\begin{aligned}
&P\{\text{"}k \text{ clienti siano serviti durante l'ora considerata"}\} \\
&= P\{X = k\} \\
&= P\left\{(X = k) \cap \bigcup_{n=k}^{\infty} (N = n)\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k|N = n)P(N = n) \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} [\lambda(1-p)]^m \\
&= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}
\end{aligned}$$

cioè $X \sim Poisson(\lambda p)$.

Esercizio 2.

Sia X una v.a. di Cauchy standard. Determinare la funzione di ripartizione e la funzione di densità della v.a.

$$\hat{X} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{X}}$$

(Suggerimento: si ricordi che se $X \sim Cauchy(0,1)$ allora $1/X \sim Cauchy(0,1)$)

N.B. Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate

Soluzione.

Sia

$$Y = \frac{1}{X} \sim Cauchy(0,1)$$

Allora

$$\begin{aligned}
F_{\hat{X}}(w) &= P\left(\hat{X} \le w\right) = P\left(\frac{1}{1+\frac{1}{X}} \le w\right) \\
&= P\left(\frac{1}{1+Y} \le w\right) \\
&= \begin{cases} \displaystyle\int_{\frac{1-w}{w}}^{-1} f_Y(y)\,\mathrm{d}y & w \le 0 \\ \displaystyle\int_{\frac{1-w}{w}}^{\infty} f_Y(y)\,\mathrm{d}y \;+\; P(Y \le 0) & w > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} -\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{\pi}\arctan\left(\dfrac{1-w}{w}\right) & w \le 0 \\ \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{\pi}\arctan\left(\dfrac{1-w}{w}\right) & w > 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

La funzione di densità è data da

$$f_{\hat{X}}(w) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{w^2 + (1-w)^2} \qquad w \in \mathbb{R}$$

Esercizio 3.

Siano $X_1, \ldots, X_n$ v.a. indipendenti e uniformi in $[0,1]$. Sia

$$U_n = \min_{1\le i\le n} X_i \qquad V_n = \max_{1\le i\le n} X_i$$

(i) Si calcoli $P(u < U_n < V_n < v)$ per $0 < u < v < 1$.

(ii) Si calcoli $P(W_n < w) = P(\frac{U_n}{V_n} < w)$.

(iii) Si calcoli la densità

$$g(w) = P(W_n \in \mathrm{d}w)/\mathrm{d}w$$

(iv) Si mostri che

$$\lim_{n\to\infty} P(W_n < w) = \begin{cases} 0 & w \le 0 \\ 1 & w > 0 \end{cases}$$

(Suggerimento: per calcolare la densità di W_n si usi la formula $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\mathrm{d}y = \beta'(x)f(x,\beta(x)) - \alpha'(x)f(x,\alpha(x)) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,y)\mathrm{d}y$)

N.B. Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate

Soluzione.

(i)

$$\begin{aligned} P(u < U_n < V_n < v) &= P\Big\{\bigcap_{j=1}^n (X_j > u), \bigcap_{j=1}^n (X_j < v)\Big\} \\ &= P\Big\{\bigcap_{j=1}^n (u < X_j < v)\Big\} \\ &= (v-u)^n \qquad 0 < u < v < 1 \end{aligned}$$

(ii) Essendo

$$F_{U_n,V_n}(u,v) = P(U_n < u, V_n < v) = P(V_n < v) - P(U_n > u, V_n < v)$$

si ha

$$\begin{aligned} f_{U_n,V_n}(u,v) &= \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} F_{U_n,V_n}(u,v) \\ &= n(n-1)(v-u)^{n-2} \qquad 0 < u < v < 1 \end{aligned}$$

Perciò

$$P\left(\frac{U_n}{V_n} < w\right) = n(n-1)\int_0^w \int_{\frac{u}{w}}^1 (v-u)^{n-2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$$

(iii) Applicando la formula per la derivazione sotto il segno di integrale alla precedente espressione si ha

$$g(w) = \begin{cases} (n-1)(1-w)^{n-2} & 0 < w < 1 \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases}$$

(iv)

$$F_{W_n}(w) = \begin{cases} 0 & w \leq 0 \\ 1 - (1-w)^{n-1} & 0 < w < 1 \\ 1 & w \geq 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 0 & w \leq 0 \\ 1 & w > 0 \end{cases}$$