**Prova scritta di Calcolo delle Probabilità**
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica
Docente: Prof. Enzo Orsingher
6 Settembre 2017

| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |
|---|---|---|

**Esercizio 1.**

Sia data una schedina del totocalcio nella quale appaiono 13 partite con tre esiti possibili, (vittoria, sconfitta e pareggio). Il numero di risultati indovinati è una v.a. $X$ che assume i valori $0, 1, 2, \dots, 13$.

(i) Calcolare la probabilità $P(X = j) \quad 0 \leq j \leq 13$.

(ii) Calcolare il numero medio e la varianza dei risultati indovinati.

(iii) Supponendo che in caso di $j$ risultati indovinati si vinca un ammontare di denaro pari a $2^j$ calcolare il guadagno medio.

(iv) Supponendo che si ottenga una ricompensa solo se si individuano 12 o 13 risultati (con compensi $2^{12}$ e $2^{13}$ rispettivamente) calcolare il guadagno medio.

*N.B. Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate*

**Soluzione.**

(i)

$$P(X = j) = \binom{13}{j} \frac{1}{3^{13}} \left(\frac{2}{3}\right)^{13-j} \qquad 0 \leq j \leq 13$$

(ii)

$$\mathbb{E}X = \frac{13}{3} \qquad \mathbb{V}X = \frac{26}{9}$$

(iii) Detta $G$ la v.a. che denota il guadagno si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{E}G &= \sum_{j=0}^{13} 2^j P(X = j) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{13} \sum_{j=0}^{13} \binom{13}{j} \\ &= \frac{2^{26}}{3^{13}}\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}G &= \sum_{j=12}^{13} 2^j P(X = j) \\ &= \frac{2^{13}}{3^{13}} + 2^{12} \cdot 13 \cdot \frac{2}{3^{13}} \\ &= 14 \cdot \frac{2^{13}}{3^{13}}\end{aligned}$$

**Esercizio 2.**

Si consideri la v.a. $N(\Gamma)$ dove $N$ è una v.a. di Poisson di parametro $\Gamma$, con $\Gamma$ v.a. con distribuzione Gamma di parametri $k$ e 1, $k \in \mathbb{N}$, indipendente da $N$.

(i) Trovare

$$P(N(\Gamma) = r) = \int_0^\infty P(N(s) = r) P(\Gamma \in \mathrm{d}s) \qquad r = 0, 1, 2, \dots$$

(ii) Trovare la funzione generatrice delle probabilità di $N(\Gamma)$.

(iii) Trovare il valore atteso e la varianza di $N(\Gamma)$.

*N.B. Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate*

**Soluzione.**

(i)

$$\begin{aligned} P(N(\Gamma) = r) &= \int_0^\infty P(N(s) = r) P(\Gamma \in \mathrm{d}s) \\ &= \int_0^\infty e^{-s} \frac{s^r}{r!} \frac{e^{-s} s^{k-1}}{(k-1)!} \,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{r!(k-1)!} \frac{(r+k-1)!}{2^{r+k}} \\ &= \binom{r+k-1}{r} \frac{1}{2^{r+k}} \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^\infty u^r P(N(\Gamma) = r) &= \int_0^\infty e^{(u-1)s} P(\Gamma \in \mathrm{d}s) \\ &= \int_0^\infty e^{(u-1)s} \frac{e^{-s} s^{k-1}}{(k-1)!} \,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^\infty e^{(u-2)s} \frac{s^{k-1}}{(k-1)!} \,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{(2-u)^k} \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}N(\Gamma) &= \int_0^\infty s P(\Gamma \in \mathrm{d}s) \\ &= \int_0^\infty s \frac{e^{-s} s^{k-1}}{(k-1)!} \in \mathrm{d}s \\ &= \int_0^\infty s^k \frac{e^{-s}}{(k-1)!} \in \mathrm{d}s \\ &= \frac{k!}{(k-1)!} \\ &= k \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}N^2(\Gamma) = k(k+1)$$

$$\mathbb{V}N(\Gamma) = k$$

**Esercizio 3.**

Siano $X_1, \ldots, X_n$ , $n \in \mathbb{N}$, v.a. *i.i.d* con distribuzione uniforme in $[0,1]$. Siano

$$Y_n = n\left(1 - \max_{1\leq j\leq n} X_j\right) \qquad\qquad Z_n = n \min_{1\leq j\leq n} X_j$$

Calcolare

(i) $P(Y_n < y)\,,\; y \in \mathbb{R}$;

(ii) $P(Z_n < z)\,,\; z \in \mathbb{R}$;

(iii) i limiti in distribuzione di $Y_n$ ed $Z_n$.

*N.B. Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate*

**Soluzione.**

(i) Per $0 \leq y \leq n$

$$\begin{aligned} P(Y_n < y) &= P\left(n\left(1 - \max X_j\right) < y\right) \\ &= P\left(\max X_j > 1 - \frac{x}{n}\right) \\ &= 1 - P\left(\max X_j < 1 - \frac{x}{n}\right) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \end{aligned}$$

Perciò

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 - \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & 0 \leq y \leq n \\ 1 & y > n \end{cases}$$

(ii) Per $0 \leq z \leq n$

$$\begin{aligned} P(Z_n < y) &= P\left(n \min X_j < z\right) \\ &= 1 - P\left(\min X_j > \frac{z}{n}\right) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{z}{n}\right)^n \end{aligned}$$

Perciò

$$F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 1 - \left(1 - \dfrac{z}{n}\right)^n & 0 \leq z \leq n \\ 1 & z > n \end{cases}$$

(iii)

$$\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(z) = \lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 1 - e^z & z > 0 \end{cases}$$