Prova scritta di Calcolo delle Probabilità
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica
Docente: Prof. Enzo Orsingher
3 Novembre 2017

Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Esercizio 1.
Nel gioco del lotto ad ogni estrazione si estraggono in blocco 5 numeri. I numeri nell'urna sono 90, da 1 a 90. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:

(i) in una estrazione il numero 17 non venga estratto;

(ii) che i numeri 17 e 13 non vengano estratti in una singola estrazione;

(iii) il numero 17 non venga estratto in 20 estrazioni;

(iv) il numero 17 viene estratto alla 21^{ma} estrazione sapendo che nelle prime 20 prove non è mai stato estratto;

(v) il numero 17 viene estratto per la prima volta alla 21^{ma} estrazione.

N.B. Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate.

Soluzione.

(i)

$$P(\text{“in una estrazione il numero 17 non venga estratto”}) = \frac{\binom{89}{5}}{\binom{90}{5}} = \frac{17}{18}$$

(ii)

$$P(\text{“che i numeri 17 e 13 non vengano estratti in una singola estrazione”}) = \frac{\binom{88}{5}}{\binom{90}{5}} = \frac{85 \cdot 84}{90 \cdot 89}$$

(iii)

$$P(\text{“il numero 17 non venga estratto in 20 estrazioni”}) = \left(\frac{17}{18}\right)^{20}$$

(iv) Vista l'indipendenza delle estrazioni,

$$P(\text{“17 estratto alla }21^{\text{ma}}\text{ estr.”}|\text{“17 non estratto nelle prime 20 prove”}) = \frac{1}{18}$$

(v)

$$P(\text{“17 estratto per la prima volta alla 21-ma estr.”}) = \left(\frac{17}{18}\right)^{20} \frac{1}{18}$$

Esercizio 2.

Per un automobilista il tempo T impiegato a percorrere 100 km di autostrada in condizioni normali è una v.a. esponenziale. Il tempo minimo di percorrenza corrisponde al caso in cui l'automobile si muove a 200 km/h (cioè impiega 30 minuti). Il parametro dell'esponenziale deve essere determinato consierando che esso è uguale al reciproco del tempo mediamente impiegato dalle auto che si muovono a 120 km/h. Tuttavia se si verfica un incidente il traffico rimane bloccato per 30 minuti. Si verifica in media un incidente ogni 10 giorni.

(i) Trovare la distribuzione del tempo di percorrenza complessivo (tenendo conto della possibilità di un incidente) dato da $T+U$, dove U è una v.a. che assume valore 30 con probabilità 1/10 e 0 con probabilità 9/10.

(ii) Calcolare la probabilità che il tempo di percorrenza complessivo sia compreso tra 60 e 100 minuti

$$P(60 < T+U < 100)$$

N.B. Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate.

Soluzione. Il tempo medio impiegato è pari a $5/6\ h = 50\ min$. Il parametro dell'esponenziale è quindi pari a $\lambda = 1/50$. La v.a. T è una esponenziale traslata di $\tau = 30$:

(i)

$$T \sim \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(t-\tau)} & t \geq \tau \\ 0 & t < \tau \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(Z \leq z) &= P(T+U \leq z) \\ &= P(U=0)P(T+U \leq z|U=0) + P(U=30)P(T+U \leq z|U=30) \\ &= \frac{9}{10}P(T \leq z) + \frac{1}{10}P(T \leq z-30) \\ &= \begin{cases} 0 & z < 30 \\ \dfrac{9}{10}\displaystyle\int_{30}^{z} \lambda e^{-\lambda(t-\tau)}\,\mathrm{d}t & 30 \leq z < 60 \\ \dfrac{9}{10}\displaystyle\int_{30}^{z} \lambda e^{-\lambda(t-\tau)}\,\mathrm{d}t + \dfrac{1}{10}\displaystyle\int_{30}^{z-30} \lambda e^{-\lambda(t-\tau)}\,\mathrm{d}t & z \geq 60 \end{cases} \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} P(60 < T+U < 100) &= F_Z(100) - F_Z(60) \\ &= \frac{9}{10}\left(e^{-\frac{3}{5}} - e^{-\frac{7}{5}}\right) + \frac{1}{10}\left(1 - e^{-\frac{4}{5}}\right) \\ &\approx 0.327 \end{aligned}$$

Esercizio 3.

Data una successione $X_j, j \geq 1$ di v.a. *i.i.d.* uniformi in $[0,1]$ e la successione

$$Y_n = \prod_{j=1}^{n} X_j \qquad n \geq 1$$

(i) mostrare che il limite in media quadratica di Y_n è zero;

(ii) dedurre da (i) il limite in distribuzione di Y_n;

(iii) discutere il limite *i.m.q.* ed in distribuzione di Y_n nel caso in cui le X_j siano *i.i.d.* uniformi in $[0, \frac{1}{2}]$.

(iv) Se le X_j fossero uniformi in $[1,2]$ come si comporterebbe asintoticamente la successione $Y_n, n \geq 1$?

N.B. Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate.

Soluzione.

(i) Per l'idipendenza e l'identica distribuzione delle X_i si ha

$$\mathbb{E}Y_n^2 = \mathbb{E}\left(\prod_i X_i^2\right) = (\mathbb{E}X_i^2)^n = \frac{1}{3^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(ii) Dato che la convergenza in media r-ma implica la convegenza in probabilità e quindi quella in distribuzione si ha che $Y_n \xrightarrow{d} 0$.

(iii) Analogamente a prima si ha che Y_n converge a zero in media quadratica ed in distribuzione poiché

$$\mathbb{E}Y_n^2 = (\mathbb{E}X_i^2)^n = \frac{1}{12^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(iv) La successione Y_n in questo caso diverge poiché $P(X_i > 1) = 1$.