Prova scritta di Calcolo delle Probabilità
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica
Docente: Prof. Enzo Orsingher
8 Gennaio 2018

Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Esercizio 1.

In un palazzo di sette piani dieci persone salgono su un ascensore. Ciascuno ha uguale probabilità di scendere ad uno qualsiasi dei piani. Calcolare la probabilità degli eventi:

(i) $A =$ "tre persone scendono al settimo piano";

(ii) $B =$ "tre persone scendono al sesto piano";

(iii) $C =$ "tre persone scendono al settimo e tre scendono al sesto";

(iv) $D =$ "scende almeno una persona a ciascun piano".

N.B. Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate.

Soluzione.

Utilizzando le combinazioni con ripetizione si ha

(i)
$$P(A) = \binom{7+7-1}{7-1} \Big/ \binom{10+7-1}{7-1} = \binom{13}{6} \Big/ \binom{16}{6} = \frac{3}{14}$$

(ii)
$$P(B) = P(A)$$

(iii)
$$P(C) = \binom{4+7-1}{7-1} \Big/ \binom{10+7-1}{7-1} = \binom{10}{6} \Big/ \binom{16}{6} = \frac{15}{572}$$

(iv)
$$P(D) = \binom{3+7-1}{7-1} \Big/ \binom{10+7-1}{7-1} = \binom{9}{6} \Big/ \binom{16}{6} = \frac{3}{286}$$

Esercizio 2.

Data una v.a. X uniforme in $[-1,1]$ e sia $Z = X+Y$ dove Y è una v.a. discreta indipendente da X che assume valore in $\{-1,+1\}$ con probabilità

$$P(Y=y) = \begin{cases} p & y=-1 \\ q & y=+1 \end{cases}$$

(i) Trovare la distribuzione di Z.

(ii) Calcolare il valore atteso di Z.

N.B. Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate.

Soluzione.

(i)

$$\begin{aligned} P(X+Y<w) &= P(X+Y<w|Y=-1)P(Y=-1) + P(X+Y<w|Y=1)P(Y=1) \\ &= pP(X<w+1) + qP(X<w-1) \\ &= \begin{cases} 0 & w \leq 0 \\ p\displaystyle\int_{-1}^{w+1} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x & -2<w<0 \\ p+q\displaystyle\int_{-1}^{w-1} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x & 0<w<2 \\ 1 & w \geq 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & w \leq 0 \\ \dfrac{p(w+2)}{2} & -2<w<0 \\ p+\dfrac{qw}{2} & 0<w<2 \\ 1 & w \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

(ii)

$$\mathbb{E}Z = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y = q-p$$

Esercizio 3.

Data una successione di v.a. $\theta_j, j = 1, 2, \ldots,$ $i.i.d$ uniformi in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

(i) Trovare la distribuzione del $\sin\theta_j$

(ii) Calcolare

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{n} \sin\theta_j\right) \quad , \qquad \mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{n} \sin\theta_j\right)^2$$

(iii) Studiare il limite in probabilità del prodotto $\prod_{j=1}^{n} \sin\theta_j$ sfruttando la disuguaglianza di Chebyshev, cioè studiare il limite per $n \to \infty$ della seguente probabilità

$$P\left(\left|\prod_{j=1}^{n} \sin\theta_j\right| > x\right) \qquad 0 < x < 1$$

(iv) (facoltativo) Calcolare

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{n} \sin\theta_j\right)^{2m}$$

N.B. Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate.

Soluzione.

(i) Per $-1 < x < 1$

$$\begin{aligned} P(\sin\theta_j < x) &= P(\theta_j < \arcsin x) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin x} \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\arcsin x + \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

$$P(\sin\theta_j < x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{1}{\pi}\left[\arcsin x + \frac{\pi}{2}\right] & -1 < x < 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

(ii)

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{n} \sin\theta_j\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}\sin\theta_j = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{n} \sin\theta_j\right)^2 &= \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}\sin^2\theta_j = \prod_{j=1}^{n} \left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta\right\} \\ &= \left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta \,\mathrm{d}\theta\right]\right\}^n \\ &= \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

(iii)

$$P\Big(\Big|\prod_{j=1}^{n}\sin\theta_j\Big| > x\Big) \le \frac{\mathbb{V}(\prod_{j=1}^{n}\sin\theta_j)}{x^2} = \frac{\mathbb{E}(\prod_{j=1}^{n}\sin\theta_j)^2}{x^2} = \frac{1}{2^n x^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \forall x > 0$$

Pertanto $\prod_{j=1}^{n}\sin\theta_j \xrightarrow{p} 0$.

(iv)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\sin^{2m}\theta_j &= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m}\theta\,\mathrm{d}\theta \qquad (\sin\theta = \sqrt{x}) \\
&= 2\int_0^1 x^m \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^{m-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}-1} \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{\Gamma\big(m+\frac{1}{2}\big)\,\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)}{\Gamma(m+1)} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}\,2^{1-2m}(2m-1)!}{\pi\, m!(m-1)!} \\
&= \frac{(2m)!}{m!\,2^{2m}\,m!} = \binom{2m}{m}\frac{1}{2^m}
\end{aligned}$$

Perciò

$$\mathbb{E}\Big(\prod_{j=1}^{n}\sin\theta_j\Big)^{2m} = \prod_{j=1}^{n}\mathbb{E}\sin^{2m}\theta_j = \left[\binom{2m}{m}\right]^n \frac{1}{2^{mn}}$$