Prova scritta di Calcolo delle Probabilità
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica
Docente: Prof. Enzo Orsingher
6 Febbraio 2018

Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Esercizio 1.

Sia dato un mazzo di carte napoletane (40 carte e 4 semi). I giocatori A e B procedono in questo modo:

1. inizia il giocatore A che estrae due carte e vince se estrae due ori oppure due assi;
2. dopo l'estrazione le due carte estratte vengono reinserite nel mazzo che viene rimescolato. Allora il giocatore B estrae due carte e vince se estrae due assi oppure due ori.

(i) Calcolare la probabilità che A vinca al suo terzo tentativo.

(ii) Calcolare la probabilità che A vinca prima o poi.

(iii) Calcolare la probabilità che B vinca prima o poi.

(iv) Calcolare la probabilità che non vincano né A né B.

N.B. Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate.

Soluzione.

Sia

$$p = P(\text{“2 ori oppure due assi”}) = \frac{\binom{10}{2} + \binom{4}{2}}{\binom{40}{2}}$$

(i) Definiamo gli eventi

$$A_k = \left(\text{“A vince al suo } k\text{-mo lancio”}\right), \quad k = 1, 2, \dots \qquad A = \left(\text{“A vince prima o poi”}\right)$$

Allora

$$P(A_3) = (1-p)^4 p$$

(ii)

$$P(A) = P(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^{2k} p = \frac{p}{1-(1-p)^2} = \frac{1}{2-p}$$

(iii) Definiamo gli eventi

$$B_k = \left(\text{“B vince al suo } k\text{-mo lancio”}\right), \quad k = 1, 2, \dots \qquad B = \left(\text{“B vince prima o poi”}\right)$$

$$P(B) = P(\cup_{k=1}^{\infty} B_k) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^{2k-1} p = \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p}$$

(iv)

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A) - P(B) = 0$$

Esercizio 2.

Sia (X, Y) una v.a. distribuita uniformemente sul rettangolo

$$R = \{(x, y) : 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\}$$

(i) Trovare la f.r. di $Z = X + Y$.

(ii) Trovare la densità della v.a. Z.

(iii) Se (X, Y) è uniforme in $R = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2\}$ cosa cambia nella distribuzione di $Z = X + Y$?

N.B. Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate.

Soluzione.

(i)

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (x, y) \in R \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Perciò

$$\begin{aligned} & P(X + Y < z) \\ & = \iint_{\{(x,y)\colon x+y<z\}} f_{X,Y}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ & = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ \frac{1}{2}\int_0^z \mathrm{d}x \int_0^{z-x} \mathrm{d}y = \frac{z^2}{2^2} & 0 < z \le 1 \\ \frac{1}{2}\left[\int_0^{z-1} \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y + \int_{z-1}^{z} \mathrm{d}x \int_0^{z-x} \mathrm{d}y\right] = \frac{1}{2}\left[z - 1 + \frac{1}{2}\right] = \frac{2z-1}{4} & 1 < z \le 2 \\ 1 - \frac{1}{2}\int_{z-1}^{2} \mathrm{d}x \int_{z-x}^{1} \mathrm{d}y = 1 - \frac{1}{4}(3-z)^2 & 2 < z \le 3 \\ 1 & z > 3 \end{cases} \end{aligned}$$

(ii)

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{z}{2} & 0 < z < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 < z < 2 \\ \frac{3-z}{2} & 2 < z < 3 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

(iii) Il risultato è uguale rispetto ai due precedenti.

Esercizio 3.

Siano $\{X_k, k \geq 1\}$ v.a. indipendenti e i.d. con distribuzione normale con media μ e varianza σ^2.

(i) Si studi il comportamento asintotico di

$$Z_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - \mathbb{E}\sum_{k=1}^n X_k}{n^\alpha}$$

nei casi in cui $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{1}{2}, \alpha > \frac{1}{2}$.

(ii) Nel caso in cui le v.a. X_k sono delle Cauchy indipendenti di parametri β e γ trovare il limite in distribuzione di

$$W_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\beta}{n^\alpha}$$

nei casi in cui $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$, $\alpha > 1$.

(Si suggerisce di utilizzare le funzioni caratteristiche).

N.B. Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate.

Soluzione.

(i)

$$\mathbb{E}e^{i\xi Z_n} = e^{-\frac{\sigma^2\xi^2}{2}\cdot\frac{n}{n^{2\alpha}}} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} \text{f.c. di una } \mathcal{N}(0,\sigma^2) & \alpha = \frac{1}{2} \\ \text{non converge in distribuzione} & 0 < \alpha < \frac{1}{2} \\ \text{v.a. degenere } X = 0 & \alpha > \frac{1}{2} \end{cases}$$

(ii)

$$\mathbb{E}e^{i\xi W_n} = e^{-\gamma|\xi|\cdot\frac{n}{n^\alpha}} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} \text{f.c. di una } \mathit{Cauchy}(0,\gamma) & \alpha = 1 \\ \text{non converge in distribuzione} & 0 < \alpha < 1 \\ \text{v.a. degenere } X = 0 & \alpha > 1 \end{cases}$$