Prova scritta di Calcolo delle Probabilità
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica
Docente: Prof. Enzo Orsingher
26 Marzo 2018

Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Esercizio 1.

Nel comporre il PIN di una carta prepagata si calcoli la probabilità dei seguenti eventi:

(i) le 5 cifre del PIN siano tutte diverse (è possibile che la prima cifra sia lo zero);

(ii) le 5 cifre del PIN siano diverse ma il primo numero non sia lo zero;

(iii) nel PIN appaiano due numeri uguali consecutivi (in questo caso la prima cifra può anche essere lo zero);

(iv) nel PIN appaiano due numeri uguali consecutivi ma la prima cifra non può essere lo zero.

N.B. Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate.

Soluzione.

(i)
$$p = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{10^5} = \frac{\frac{10!}{5!}}{10^5} = \frac{\frac{9!}{5!}}{10^4}$$

(ii)
$$p = \frac{9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{9 \cdot 10^4} = \frac{\frac{9!}{5!}}{10^4}$$

(iii)
$$p = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4}{10^5} = \frac{10 \cdot \frac{9!}{6!} \cdot 4}{10^5} = \frac{\frac{9!}{6!} \cdot 4}{10^4} = \frac{2}{3} \cdot p_2$$

Nella prima cifra posso mettere 10 numeri e il seguente deve essere uguale al primo. La coppia può collocarsi in ogni posizione. Le altre tre cifre devono essere diverse.

(iv) Se voglio evitare lo zero come prima cifra allora
$$p = \frac{9 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 + 9 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 3}{9 \cdot 10^4} = \frac{39 \cdot 8 \cdot 7}{10^4}$$

Esercizio 2.

Siano X ed Y v.a. indipendenti con distribuzione $Exp(1)$. Trovare la distribuzione di

(i)

$$Z = \frac{Y}{X+Y}$$

(ii)

$$U = \frac{Y}{X}$$

N.B. Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate.

Soluzione.

(i) Per $0 < z < 1$

$$\begin{aligned} P(Z < z) &= P(Y < z(X+Y)) = P\Big(Y < X\frac{z}{1-z}\Big) \\ &= \int_0^\infty e^{-x} \int_0^{x\frac{z}{1-z}} e^{-y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty e^{-x}(1 - e^{-x\frac{z}{1-z}})\,\mathrm{d}x \\ &= 1 - (1-z) = z \end{aligned}$$

La v.a. Z è uniforme in $[0,1]$.

(ii) Per $u > 0$

$$\begin{aligned} P(U < u) = P(Y < uX) &= \int_0^\infty e^{-x} \int_0^{ux} e^{-y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty e^{-x}(1 - e^{-ux})\,\mathrm{d}x \\ &= 1 - \int_0^\infty e^{-x(1+u)}\,\mathrm{d}x \\ &= 1 - \frac{1}{1+u} = \frac{u}{1+u} \end{aligned}$$

$$P(U \in \mathrm{d}u)/\mathrm{d}u = \frac{1}{(1+u)^2} \quad u > 0$$

Esercizio 3.

Siano $X_1, X_2 \ldots, X_n$ v.a. indipendenti e i.d. con distribuzione normale con media zero e varianza $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$. Si consideri

$$Z_n = \sum_{j=1}^{n} X_j a_j$$

con $a_j \in \mathbb{R}, \forall j$.

(i) Si studi la distribuzione di Z_n.

(ii) Si studi la convergenza in distribuzione di Z_n per $n \to \infty$.

(iii) Calcolare la distribuzione limite nel caso $a_j = q^j, |q| < 1$, e $\sigma_j^2 = \sigma^2$.

(Si suggerisce di utilizzare le funzioni caratteristiche).

N.B. Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate.

Soluzione.

(i)

$$Z_n \sim \mathcal{N}\Big(0, \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \sigma_j^2\Big)$$

(ii) Per $n \to \infty$

$$Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}\Big(0, \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 \sigma_j^2\Big)$$

purché $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 \sigma_j^2 < \infty$.

(iii) Siccome

$$\sigma^2 \sum_{j=1}^{\infty} q^j = \frac{\sigma^2 q}{1-q}$$

si ha

$$Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}\Big(0, \frac{\sigma^2 q}{1-q}\Big)$$