Prova scritta di Calcolo delle Probabilità
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica
Docente: Prof. Enzo Orsingher
4 Giugno 2018

Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Esercizio 1.

I componenti elettronici prodotti da una ditta possono avere difetti di due tipi, D_1 e D_2. Il difetto D_1 si presenta con probabilità 4%. Il difetto D_2 si presenta, indipendentemente da D_1, con probabilità 6%.

(i) Calcolare la probabilità che un componente abbia entrambi i difetti.

(ii) Calcolare la probabilità che un componente sia difettoso.

(iii) Calcolare la probabilità che un componente abbia il difetto D_1 sapendo che è difettoso.

(iv) Calcolare la probabilità che un componente abbia uno solo dei due difetti sapendo che è difettoso.

Soluzione.

(i)

$$P(D_1 \cap D_2) = P(D_1)P(D_2) = \frac{24}{10^4}$$

(ii)

$$P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2) = \frac{4}{10^2} + \frac{6}{10^2} - \frac{24}{10^4} = \frac{976}{10^4}$$

(iii)

$$P(D_1 | D_1 \cup D_2) = \frac{P(D_1)}{P(D_1 \cup D_2)} = \frac{\frac{4}{10^2}}{\frac{976}{10^4}} = \frac{25}{61}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
P((D_1^c \cap D_2) \cup (D_1 \cap D_2^c) | D_1 \cup D_2) &= P((D_1 \cup D_2) \cap (D_1 \cap D_2)^c | D_1 \cup D_2) \\
&= P(D_1 \cup D_2 | D_1 \cup D_2) - P(D_1 \cap D_2 | D_1 \cup D_2) \\
&= 1 - \frac{P(D_1 \cap D_2)}{P(D_1 \cup D_2)} = 1 - \frac{\frac{24}{10^4}}{\frac{976}{10^4}}
\end{aligned}$$

Esercizio 2.

Sia (X,Y) un vettore aleatorio con distribuzione

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda y} & 0 < x < y \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

(i) Calcolare le distribuzioni marginali di X e di Y.

(ii) Calcolare la distribuzione di $Z = X + Y$.

(iii) X e Y sono indipendenti?

Soluzione.

(i) $X \in (0,\infty)$ q.c.. Per $x > 0$

$$f_X(x) = \int_x^\infty \lambda^2 e^{-\lambda y}\, \mathrm{d}y = \lambda e^{-\lambda x}$$

cioè $X \sim Exp(\lambda)$. $Y \in (0,\infty)$ q.c.. Per $y > 0$

$$f_Y(y) = \int_0^y \lambda^2 e^{-\lambda y}\, \mathrm{d}x = \lambda^2 y e^{-\lambda y}$$

cioè $Y \sim Gamma(2,\lambda)$.

(ii) $Z \in (0,\infty)$ q.c.. Per $z > 0$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int_0^{\frac{z}{2}} \mathrm{d}x \int_x^{z-x} \lambda^2 e^{-\lambda y} \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{z}{2}} \lambda \left(e^{-\lambda x} - e^{-\lambda(z-x)} \right) \mathrm{d}x \\ &= 1 - 2e^{-\lambda \frac{z}{2}} + e^{-\lambda z} = \left(1 - e^{-\lambda \frac{z}{2}}\right)^2 \end{aligned}$$

(iii) Siccome $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$ le variabili sono dipendenti.

Esercizio 3.

Si consideri una successione di v.a. *i.i.d.* $\{X_k, k \geq 1\}$ con legge $P(X_k = -\sqrt{3}) = P(X_k = +\sqrt{3}) = \frac{1}{2}$ e la successione

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n(n+1)}} X_k \ , \qquad n \geq 1.$$

(i) Calcolare la varianza di Y_n.

(ii) Calcolare la funzione caratteristica di Y_n.

(iii) Calcolare il limite per $n \to \infty$ della funzione caratteristica e dedurre il limite in distribuzione delle Y_n. (Sugg.: si utilizzi il fatto che per $x \to 0$ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x)$ e $\ln(1+x) = x + o(x)$).

Soluzione.

(i)

$$\mathbb{V}Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n(n+1)} \mathbb{E}X_k^2 = \frac{3}{n(n+1)} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{3}{2}.$$

(ii)

$$\mathbb{E}e^{itY_n} = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}e^{\frac{ikt}{n(n+1)} X_k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \left(e^{it\sqrt{\frac{3k}{n(n+1)}}} + e^{-it\sqrt{\frac{3k}{n(n+1)}}} \right) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(t\sqrt{\frac{3k}{n(n+1)}} \right)$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}e^{itY_n} &= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{3k}{n(n+1)} \frac{t^2}{2} \right) = e^{\lim_n \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{3k}{n(n+1)} \frac{t^2}{2}\right)} \\
&= e^{\lim_n \left(-\frac{3t^2}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n(n+1)} \right)} \\
&= e^{-\frac{3t^2}{4}}
\end{aligned}$$

ovvero $Y_n \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{3}{2}\right)$.