Prova scritta di Calcolo delle Probabilità
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica
Docente: Prof. Enzo Orsingher
2 Luglio 2018

Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Esercizio 1.

Per valutare la resistenza dei propri circuiti una casa di produzione effettua dei test. Il circuito viene collegato ad un impianto che entra in funzione per un certo periodo di tempo e poi viene spento. Si ripete la prova più volte. Durante il periodo di accensione si sa che in media due volte su tre si verifica uno sbalzo di tensione. I tecnici suppongono che la probabilità di guasto sia pari a 2α se il circuito è sottoposto a tensione elettrica normale, ad 8α se si verifica uno sbalzo di tensione (α abbastanza piccolo).

(i) Calcolare la probabilità che il circuito subisca un guasto durante un utilizzo del sistema.

(ii) Dopo quante prove il circuito si guasta per la prima volta?

(iii) Si effettua un test che consiste in una serie di 10 accensioni consecutive del sistema. Calcolare la probabilità che il circuito non subisca mai guasti.

(iv) Un circuito si ritiene affidabile se supera il test con probabilità superiore al 90%. Per quali α un circuito è affidabile?

Soluzione.

$$A = \text{“guasto ad un circuito”} \quad G = \text{“sbalzo di tensione”}$$

$$P(G) = \frac{2}{3} \qquad P(A|G) = 8\alpha \qquad P(A|G^c) = 2\alpha$$

(i)

$$P(A) = P(G)P(A|G) + P(G^c)P(A|G^c) = \frac{2}{3}8\alpha + \frac{1}{3}2\alpha = 6\alpha.$$

(ii)

$$X = \text{“attesa del primo guasto”} \sim Geom(6\alpha)$$

(iii)

$$P(X > 10) = (1 - 6\alpha)^{10}$$

(iv)

$$\text{“circuito affidabile”} \Leftrightarrow (1 - 6\alpha)^{10} > 0.9 \Leftrightarrow \alpha < \frac{1}{6}\left(1 - 0.9^{\frac{1}{10}}\right) \approx 0.0017$$

Esercizio 2.

Sia (X, Y) un vettore aleatorio a.c. con densità

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \kappa & (x,y) \in R \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

dove la regione R, rappresentata in Figura 1, è data da

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq |x| \leq 1\}$$

(i) Determinare la costante κ.

(ii) Trovare le densità marginali di X ed Y.

(iii) Calcolare $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}Y$, $\mathbb{E}|X|$, $\mathbb{E}|Y|$.

(iv) Calcolare la distribuzione di $W = \min\{|Y|, \frac{1}{2}\}$.

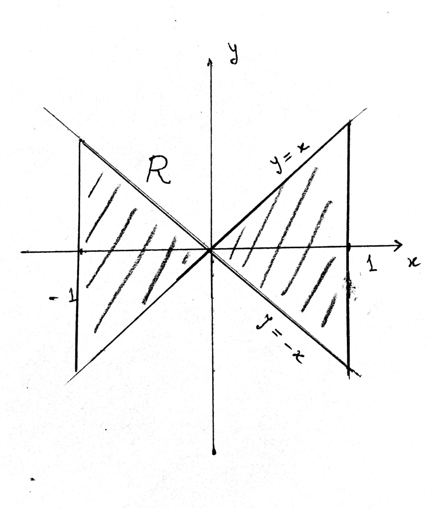

Figura 1: Grafico della regione R

Soluzione.

(i)

$$1 = \kappa \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-|x|}^{|x|} \mathrm{d}y = \kappa \int_{-1}^{1} 2|x| \, \mathrm{d}x = 2\kappa.$$

da cui $\kappa = \frac{1}{2}$.

(ii) $Y \in [-1, 1]$ q.c.. Per $y \in [-1, 1]$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\int_{-1}^{-y} \mathrm{d}x + \int_{y}^{1} \mathrm{d}x) & y \geq 0 \\ \frac{1}{2}(\int_{-1}^{y} \mathrm{d}x + \int_{-y}^{1} \mathrm{d}x) & y < 0 \end{cases} = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{-|y|} \mathrm{d}x + \int_{|y|}^{1} \mathrm{d}x\right) = 1 - |y|$$

perciò

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 - |y| & |y| \leq 1 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

$X \in [-1,1]$ q.c.. Per $x \in [-1,1]$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_{-x}^{x} \mathrm{d}y & x \geq 0 \\ \frac{1}{2}\int_{x}^{-x} \mathrm{d}y & x < 0 \end{cases} = \frac{1}{2}\int_{-|x|}^{|x|} \mathrm{d}y = |x|.$$

perciò

$$f_X(x) = \begin{cases} |x| & |x| \leq 1 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

(iii) $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = 0$ perché le v.a. sono simmetriche intorno all'origine.

$$\mathbb{E}|X| = \int_{-1}^{1} |x|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{E}|Y| = \int_{-1}^{1} |y|(1-|y|)\,\mathrm{d}y = 2\Big(\frac{y^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{y^3}{3}\Big|_0^1\Big) = \frac{1}{3}$$

(iv)

$$W = \begin{cases} |Y| & |Y| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & |Y| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$W \in [0, \frac{1}{2}]$ q.c.. Se $w \in [0, \frac{1}{2})$

$$F_W(w) = P(W \leq w) = P(|Y| \leq w) = \int_{-w}^{w} (1-|y|)\,\mathrm{d}y$$
$$= 2w - w^2.$$

Se $w = \frac{1}{2}$

$$P\Big(W = \frac{1}{2}\Big) = P\Big(|Y| \geq \frac{1}{2}\Big) = 1 - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1-|y|)\mathrm{d}y = \frac{1}{4}.$$

Quindi

$$F_W(w) = \begin{cases} 0 & w < 0 \\ 2w - w^2 & 0 \leq w < \frac{1}{2} \\ 1 & w \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Esercizio 3.

Siano $\{X_n, n \geq 1\}$ e $\{Y_n\}_n$ due successioni di v.a. indipendenti con distribuzione $Exp(\lambda_n)$ e $Exp(\mu_n)$ rispettivamente. Studiare la convergenza in distribuzione di

$$Z_n = \frac{X_n - Y_n}{X_n + Y_n} \qquad n \geq 1$$

nel caso in cui

(i) $\lim_{n\to\infty} \lambda_n/\mu_n = 0$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} \lambda_n/\mu_n = 1$,

(iii) $\lim_{n\to\infty} \lambda_n/\mu_n = \infty$.

Soluzione.

La funzione $f(x,y), x > 0, y > 0$ è positiva, negativa o nulla rispettivamente per $x > y, x < y, x = y$. Per $y \to \infty$ $f \to -1$, Per $x \to \infty$ $f \to +1$ e si vede che $-1 \leq f \leq 1$ $\forall x, y > 0$. Quindi $Z_n \in (-1, 1)$ q.c. per ogni n. Per $z \in (-1,1)$, posto

$$A_z = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2_+ : \frac{x-y}{x+y} \leq z \right\} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2_+ : y \geq x \frac{1-z}{1+z} \right\}$$

si ha

$$\begin{aligned} F_{Z_n}(z) &= P\left(\frac{X_n - Y_n}{X_n + Y_n} \leq z \right) = \iint_{A_z} f_{X,Y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &= \int_0^\infty \lambda_n e^{-\lambda_n x} \int_{x\frac{1-z}{1+z}}^\infty \mu_n e^{-\mu_n y} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^\infty \lambda_n e^{-x\left(\lambda_n + \mu_n \frac{1-z}{1+z}\right)} \mathrm{d}x \\ &= \frac{\lambda_n}{\lambda_n + \mu_n \frac{1-z}{1+z}}. \end{aligned}$$

Perciò

$$F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0 & z \leq -1 \\ \dfrac{\lambda_n/\mu_n}{\lambda_n/\mu_n + \frac{1-z}{1+z}} & -1 < z < 1 \\ 1 & z \geq 1 \end{cases}$$

(i)

$$F_{Z_n}(z) \xrightarrow{\lambda_n/\mu_n \to 0} \begin{cases} 0 & z \leq -1 \\ 0 & -1 < z < 1 \\ 1 & z \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & z < 1 \\ 1 & z \geq 1 \end{cases}$$

cioè $Z_n \xrightarrow{d,p} 1$.

(ii)

$$F_{Z_n}(z) \xrightarrow{\lambda_n/\mu_n \to 1} \begin{cases} 0 & z \leq -1 \\ \frac{1}{1 + \frac{1-z}{1+z}} = \frac{z+1}{2} & -1 < z < 1 \\ 1 & z \geq 1 \end{cases}$$

cioè $Z_n \xrightarrow{d} Unif(-1,1)$.

(iii)

$$F_{Z_n}(z) \xrightarrow{\lambda_n/\mu_n \to 0} \begin{cases} 0 & z \leq -1 \\ 1 & -1 < z < 1 \\ 1 & z \geq 1 \end{cases} \overset{(*)}{=} \begin{cases} 0 & z < -1 \\ 1 & z \geq -1 \end{cases}$$

(*nei punti di continuità) cioè $Z_n \xrightarrow{d,p} -1$.