Prova scritta di Calcolo delle Probabilità
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica
Docente: Prof. Enzo Orsingher
3 Settembre 2018

Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Esercizio 1.

(i) Un cinema ha k file con h posti su ciascuna fila. Un frequentatore del cinema vuol sedersi accanto ad una persona con la quale vuole iniziare una conversazione. Ci sono tante persone quanti i posti disponibili, ed i posti assegnati casualmente. Con quale probabilità riuscirà a sedersi a fianco alla persona prescelta?

(ii) n persone siedono attorno ad un tavolo circolare di n posti. Una persona vuol sedersi accanto ad un'altra con cui ha interesse ad avviare una conversazione. Con quale probabilità riuscirà a farlo?

N.B. Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate.

Soluzione.

(i)

$$P(A) = \frac{1}{k}\left[\frac{(h-2)!2}{h!} + \frac{(h-2)2(h-2)!}{h!}\right] = \frac{2}{hk}$$

dove il termine $1/k$ è dovuto alla scelta della fila; il primo addendo è relativo ai due posti agli estremi della fila; il secondo addendo ai posti intermedi.

(ii)

$$P(B) = \frac{2n(n-2)!}{n!} = \frac{2}{n-1}$$

dove la n al denominatore è dovuta alla scelta del posto della prima persona di interesse ed il fattore due denota il numero di modi in cui le si può sedere a fianco.

Esercizio 2.

Un giocatore d'azzardo punta ripetutamente alla roulette. Inizialmente punta sempre sullo stesso esito, il quale ha probabilità p_1 di verificarsi. Appena ottiene la prima vittoria inizia a puntare ripetutamente su un diverso esito, il quale ha probabilità p_2 di accadere. Continua a giocare finché non ottiene la seconda vittoria.

(i) Calcolare la distribuzione del numero G di puntate complessive effettuate.

(ii) Calcolare la funzione generatrice delle probabilità di G e da essa dedurre la distribuzione di G.

(iii) Calcolare il valore atteso di G.

(iv) Discutere il caso $p_1 = p_2$.

N.B. Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate.

Soluzione.

(i) Siano G_1 e G_2 le variabili aleatorie che descrivono l'attesa della prima e della seconda vincita, rispettivamente. Allora

$$G_1 \sim Geom(p_1) \qquad\qquad G_2 \sim Geom(p_2)$$

e l'attesa della seconda vincita G è data da

$$G = G_1 + G_2$$

dove G_1 e G_2 sono indipendenti ma non identicamente distribuite. Ponendo $q_i = 1-p_i, i = 1, 2$, si ha, per $l = 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned}
P(G = l) = P(G_1 + G_2 = l) &= \sum_{k=1}^{l-1} P(G_1 = k)P(G_2 = l - k) \\
&= \sum_{k=1}^{l-1} p_1\, q_1^{k-1}\, p_2\, q_2^{l-k-1} = p_1\, p_2\, q_2^{l-2} \sum_{k=1}^{l-1} \left(\frac{q_1}{q_2}\right)^{k-1} \\
&= p_1\, p_2\, q_2^{l-2} \frac{1 - \left(\frac{q_1}{q_2}\right)^{l-1}}{1 - \frac{q_1}{q_2}} = p_1\, p_2\, \frac{q_2^{l-1} - q_1^{l-1}}{q_2 - q_1}.
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}u^G = \mathbb{E}u^{G_1+G_2} &= \left(\sum_{r=1}^{\infty} u^r p_1 q_1^{r-1}\right) \cdot \left(\sum_{l=1}^{\infty} u^l p_2 q_2^{l-1}\right) \\
&= \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} p_1 p_2\, u^{r+l} q_1^{r-1} q_2^{l-1} \\
&\overset{j=r+l}{=} \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{j=r+1}^{\infty} p_1 p_2\, u^j q_1^{r-1} q_2^{j-r-1} \\
&= p_1 p_2 \sum_{j=2}^{\infty} u^j \frac{q_2^{j-1}}{q_1} \sum_{r=1}^{j-1} \left(\frac{q_1}{q_2}\right)^r \\
&= p_1 p_2 \sum_{j=2}^{\infty} u^j \frac{q_2^{j-1}}{q_1} \frac{q_1}{q_2} \frac{\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^{j-1} - 1}{\frac{q_1}{q_2} - 1} \\
&= \sum_{j=2}^{\infty} u^j P(G = j).
\end{aligned}$$

Da cui, semplificando si ha

$$P(G=j)=P(G_1+G_2=j)=p_1\,p_2\,\frac{q_2^{j-1}-q_1^{j-1}}{q_2-q_1}\qquad j=2,3,\dots$$

(iii)

$$\mathbb{E}G=\mathbb{E}G_1+\mathbb{E}G_2=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}.$$

(iv) Prendendo il limite per $p_2\to p_1$ si ha

$$P(G=j)=P(G_1+G_2=j)=\lim_{p_2\to p_1}p_1\,p_2\,\frac{q_2^{j-1}-q_1^{j-1}}{q_2-q_1}=(j-1)p_1^2q_1^{j-2}\qquad j=2,3,\dots$$

ovvero $G\sim BinomNeg(2,p_1)$ essendo G l'attesa del secondo successo in una sequenza di prove indipendenti con uguale probabilità di successo p_1.

Esercizio 3.

Siano $\{X_n\}_n$ una successione di variabili aleatorie *i.i.d.* con distribuzione $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Studiare la distribuzione di

(i)
$$Y_n = \frac{1}{n^{\frac{m}{2}}}\sum_{k=1}^{n} kX_k\,, \quad n\in\mathbb{N}$$

(ii)
$$Z_n = \frac{1}{n^{\frac{m}{2}}}\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{3}{2}}X_k\,, \quad n\in\mathbb{N}$$

(iii) Studiare il limite in distribuzione di $\{Y_n\}$ e $\{Z_n\}$, al variare di m che supponiamo per semplicità intero.

(Sugg.: si ricorda che $\sum_{k=1}^n k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$, $\sum_{k=1}^n k^3 = (n(n+1)/2)^2$).

N.B. Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate.

Soluzione.

(i) Essendo
$$\mathbb{V}(Y_n) = \frac{1}{n^m}\sum_{k=1}^{n} k^2\mathbb{V}(X_k) = \frac{\sigma^2}{n^m}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
si ha
$$Y_n \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{n(n+1)(2n+1)\sigma^2}{6n^m}\right).$$

(ii) Essendo
$$\mathbb{V}(Z_n) = \frac{1}{n^m}\sum_{k=1}^{n} k^3\mathbb{V}(X_k) = \frac{\sigma^2}{n^m}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$
si ha
$$Z_n \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{n^m}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\right).$$

(iii) Utilizzando le funzioni caratteristiche si ha
$$\mathbb{E}e^{itY_n} = e^{-t^2\frac{\sigma^2}{n^m}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 0 & m<3 \\ e^{-t\frac{\sigma^2}{3}} & m=3 \\ 1 & m>3 \end{cases}$$
$$Y_n \xrightarrow{d} \begin{cases} \text{non converge } i.d. & m<3 \\ Y\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2/3) & m=3 \\ 0 & m>3 \end{cases}\,,$$
e
$$\mathbb{E}e^{itZ_n} = e^{-t^2\frac{\sigma^2}{n^m}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 0 & m<4 \\ e^{-t\frac{\sigma^2}{4}} & m=4 \\ 1 & m>4 \end{cases}\,,$$
$$Z_n \xrightarrow{d} \begin{cases} \text{non converge } i.d. & m<4 \\ Z\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2/4) & m=4\,. \\ 0 & m>4 \end{cases}$$