Prova scritta di Calcolo delle Probabilità
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica
Docente: Prof. Enzo Orsingher
8 Ottobre 2018

Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Esercizio 1.

(i) Uno studente ha in programma di dare 4 esami in una sessione.Tutti gli scritti si devono svolgere nei 5 giorni dal lunedì al venerdì. Ogni giorno ci sono 3 blocchi di orari (di 3 ore ciascuno). Con quale probabilità lo studente è in grado di dare i 4 esami che ha in programma tutti in quattro giorni diversi?

(ii) Un albergo accetta due diversi tipi di carte di credito, VISA e MasterCard. La percentuale di detentori di carte VISA è pari al 35 % mentre la percentuale dei clienti possiede una MasterCard è pari al 50%. Inoltre il 10 % dei clienti possiede entrambe le carte di credito. Con quale probabilità un cliente è in grado di pagare con carta di credito?

(iii) Ci sono 12 individui di cui 6 maschi e 6 femmine. Vengono divisi a caso in due gruppi di uguale numero. Con quale probabilità ogni gruppo sarà composto dallo stesso numero di uomini e di donne?

Soluzione.

(i)

$$P(\text{“esami in giorni diversi”}) = \frac{\binom{5}{4}3^4}{\binom{15}{4}}$$

poichè delle $\binom{15}{4}$ scelte possibili per i 4 blocchi in cui si possono dare gli esami si hanno tanti casi favorevoli quanti i modi di scelgiere $\binom{5}{4}$ giorni diversi e uno qualsiasi dei 3 blocchi di orario in ciascuno di questi.

(ii) Siano

$$A = \text{“cliente possiede carta VISA”} \qquad B = \text{“cliente possiede carta MasterCard”}$$

Un cliente è in grado di pagare con carta se possiede o VISA o MasterCard.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.35 + 0.5 - 0.1 = 0.75$$

(iii)

$$P(\text{“stesso numero di uomini e di donne in ciascun gruppo”}) = \frac{\binom{6}{3}\binom{6}{3}}{\binom{12}{6}}.$$

Esercizio 2.

Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti e uniformi in [0,1]. Sia $Z = XY$.

(i) Trovare la funzione di ripartizione di Z.

(ii) Trovare la densità di Z.

(iii) Calcolare $\mathbb{E}Z$.

(iv) Calcolare $Var\, Z$.

Soluzione.

(i) $Z \in (0,1)$ quasi certamente. Per $0 < z < 1$

$$F_Z(z) = P(Z < z) = P(XY < z) = \int_{\{(x,y):xy<z\}} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 1 - \int_z^1 \mathrm{d}x \int_{\frac{z}{x}}^1 \mathrm{d}y$$

$$= 1 - \int_z^1 \left(1 - \frac{z}{x}\right) \mathrm{d}x = 1 - (1-z) + z \ln x\Big|_{x=z}^{x=1} = z - z\ln z$$

(ii) Derivando la f.r. si ha

$$f_Z(z) = -\ln z \cdot \mathbf{1}(z)_{(0,1)}$$

(iii) Vista l'indipendenza, ed essendo $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = \frac{1}{2}$, si ha

$$\mathbb{E}Z = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y = \frac{1}{4}.$$

(iv)

$$Var\, Z = \mathbb{E}Z^2 - (\mathbb{E}Z)^2 = \mathbb{E}X^2\mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Z)^2 = \left(\int_0^1 x\, \mathrm{d}x\right)^2 - \frac{1}{16} = \frac{1}{9} - \frac{1}{16} = \frac{7}{144}.$$

Esercizio 3.

Sia $A_{n,p}$ una v.a. binomiale di parametri $n \in \mathbb{N}$ e $p \in (0,1)$.

(i) Si scriva la funzione generatrice delle probabilità di $A_{n,p}$.

(ii) Se $p = \lambda/n$ calcolare il limite in distribuzione di $A_{n,\lambda/n}$ per $n \to \infty$ facendo uso delle funzioni generatrici delle probabilità.

(iii) Se si considerano variabili aleatorie Binomiali indipendenti di parametri n e $p = \lambda/n$, la somma

$$S^n_{k,\lambda} = \sum_{j=1}^{k} A^{(j)}_{n,\lambda/n}$$

a quale v.a. converge in distribuzione per $n \to \infty$?

Soluzione.

(i) Indicando con B_p una v.a. con distribuzione di *Bernoulli*(p) e con $G_{B_p}(u)$ la sua f.g.p. si ha

$$G_{A_{n,p}}(u) = \mathbb{E}u^{A_{n,p}} = \big(G_{B_p}(u)\big)^n = (pu+q)^n \qquad u \in \mathbb{R}$$

con $q = 1 - p$.

(ii)

$$G_{A_{n,\lambda/n}}(u) = \left(u\frac{\lambda}{n} + 1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \left[1 - \frac{\lambda}{n}(1-u)\right]^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\lambda(1-u)} = G_{N_\lambda}(u) \qquad u \in \mathbb{R}$$

dove N_λ è una v.a. di Poisson di parametro λ.

(iii) Sfruttando quanto ottenuto al punto precedente si ha

$$G_{S^n_{k,\lambda}}(u) = \big(G_{A_{n,\lambda/n}}(u)\big)^k \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-k\lambda(1-u)} = G_{N_{k\lambda}}(u) \qquad u \in \mathbb{R}$$

ovvero $S^n_{k,\lambda}$ converge ad una v.a. di Poisson di parametro $k\lambda$.