Prova scritta di Calcolo delle Probabilità
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica
Docente: Prof. Enzo Orsingher
7 Gennaio 2018

Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Esercizio 1.

Supponiamo di avere un mazzo di carte napoletane (40 carte, 4 semi:denari, spade, coppe, bastoni). Due giocatori, A e B, estraggono due carte a turno. Vince chi per la prima volta estrae il 7 di denari oppure due carte di spade. Se nessuno dei giocatori estrae il 7 di denari o due carte di spade si ricomincia daccapo dopo aver rimescolato le carte.

(i) Determinare la probabilità che il giocatore A, che comincia per primo, vinca alla prima prova.

(ii) Determinare la probabilità che il giocatore A vinca al secondo turno (cioè alla terza estrazione).

(iii) Determinare la probabilità che il giocatore A vinca all'estrazione di ordine $2k+1$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

(iv) Calcolare la probabilità che prima o poi vinca A.

Soluzione.

(i) Si richiede di calcolare $P(A \cup B)$ dove

$$A = \text{“'si estrae il 7 di denari'}$$
$$B = \text{“due carte di spada estratte”}$$

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2 \cap A_1^c)$$
$$P(B) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2|B_1)$$

Per vincere con il 7 di denari basta che venga estratto alla prima o alla seconda estrazione.

$$P(A_1 \cup A_2) = \frac{1}{40} + \frac{39}{40}\frac{1}{39} = \frac{1}{20}$$
$$P(B_1 \cap B_2) = \frac{10}{40}\frac{9}{39} = \frac{1}{4}\frac{3}{13}$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{20} + \frac{1}{4 \cdot 13} = \frac{7}{5 \cdot 13}$$

(ii) Per vincere al secondo turno occorre che A non vinca alla prima estrazione, B non vince alla seconda e A vinca alla terza. Indicando con V_i l'evento “vittoria alla $i-$ma estrazione” si ha

$$P(V_1^c \cap V_2^c \cap V_3) = \left(1 - \frac{7}{5 \cdot 13}\right)^2 \left(\frac{7}{5 \cdot 13}\right) = \frac{58^2}{5^2 \cdot 13^2}\frac{7}{5 \cdot 13}$$

(iii) Per vincere alla $2k+1$mo turno

$$P(V_1^c \cap V_2^C \cap \cdots \cap V_{2k}^c \cap V_{2k+1}) = \left(\frac{58}{5 \cdot 13}\right)^{2k} \frac{7}{5 \cdot 13}$$

(iv) La probabilità che prima o poi vinca A è data da

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{58}{5 \cdot 13}\right)^{2k} \frac{7}{5 \cdot 13} = \frac{\frac{7}{5 \cdot 13}}{1 - \left(\frac{58}{7 \cdot 13}\right)^2} = \frac{7 \cdot 5 \cdot 13}{65^2 - 58^2} = \frac{455}{861}$$

Esercizio 2.

Sia X uniforme $[-1,1]$ e sia Y una v.a. indipendente da X. Trovare la distribuzione di $Z = X+Y$ nel caso in cui la distribuzione di Y è data da

(i)

$$P(Y=y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & y=1 \\ \frac{1}{2} & y=3 \end{cases}$$

(ii)

$$P(Y=y) = \begin{cases} p & y=1 \\ q=1-p & y=3 \end{cases}$$

Soluzione.

(i) Ricordando che

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & z \leq -1 \\ \frac{z+1}{2} & -1 < z < 1 \\ 1 & z > 1 \end{cases}$$

si ha

$$P(Z<z) = P(X+Y<z) = P(X<z-1)P(Y=1) + P(X<z-3)P(Y=3)$$

$$= \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ \frac{1}{2}\frac{z}{2} = \frac{z}{4} & 0 < z \leq 2 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{z-2}{2} = \frac{z}{4} & 2 < z \leq 4 \\ 1 & z > 4 \end{cases}$$

(ii) Analogamente

$$P(Z<z) = P(X+Y<z) = P(X<z-1)P(Y=1) + P(X<z-3)P(Y=3)$$

$$= \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ p\frac{z}{2} & 0 < z \leq 2 \\ p + q\frac{z-2}{2} & 2 < z \leq 4 \\ 1 & z > 4 \end{cases}$$

Esercizio 3.

(i) Sia $\{X_n,\, n = 1, 2, \dots\}$ una successione di v.a. indipendenti ed identicamente distribuite con legge $Unif(0, 1)$. Studiare la convergenza in distribuzione della successione

$$Z_n = \max_{1\le k\le n} X_k^{1/\alpha_n} \qquad n = 1, 2, \dots$$

assumendo che $\alpha_n > 0\ \forall n$.

(ii) Siano $\{S_n,\, n = 1, 2, \dots\}$ e $\{T_n,\, n = 1, 2, \dots\}$ due successioni di v.a. tutte indipendenti tra di loro e con distribuzione esponenziale di parametri rispettivamente λ_n e μ_n. Calcolare la distribuzione di

$$W_n = \frac{S_n}{S_n + T_n} \qquad n = 1, 2, \dots$$

e studiarne il limite in distribuzione nel caso in cui $\lambda_n = \lambda/n$, $\mu_n = \lambda^2/n^2$, $\lambda > 0$, $n = 1, 2, \dots$

Soluzione.

(i) Indicando con X una copia indipendente delle X_k si ha

$$\begin{aligned} F_{Z_n}(z) &= P\left(\max_{1\le k\le n} X_k^{1/\alpha_n} \le z\right) = \left(P(X_k^{1/\alpha_n} < z)\right)^n = [F_X(z^{\alpha_n})]^n \\ &= \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ z^{\alpha_n \cdot n} & 0 < z < 1 \\ 1 & z > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Prendendo il limite per $n \to \infty$ si ha

$$Z_n \xrightarrow{d} \begin{cases} Deg(0) & n\alpha_n \to 0 \\ X^{1/\alpha} & n\alpha_n \to \alpha > 0 \\ Deg(1) & n\alpha_n \to \infty \end{cases}$$

(ii) Per $0 < w < 1$

$$\begin{aligned} F_{W_n}(w) &= P\left(\frac{S_n}{S_n + T_n} < w\right) = P(X_n < w(S_n + T_n)) = P\left(S_n < \frac{T_n w}{1-w}\right) \\ &= \mu_n \int_0^\infty e^{-\mu_n y} \int_0^{\frac{yw}{1-w}} \lambda_n e^{-\lambda_n x}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \lambda_n \int_0^\infty e^{-\lambda_n x} \int_{x\frac{1-w}{w}}^\infty \mu_n e^{-\mu_n x}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \\ &= \lambda_n \int_0^\infty e^{-\lambda_n x} e^{\mu_n x \frac{1-w}{w}}\, \mathrm{d}x = \frac{\lambda_n}{\lambda_n + \mu_n \frac{1-w}{w}}. \end{aligned}$$

Perciò, per $\lambda_n = \lambda/n$, $\mu_n = \lambda_n^2$ si ha

$$F_{W_n}(w) = \begin{cases} 0 & w \le 0 \\ \frac{1}{1+\frac{\lambda}{n}\frac{1-w}{w}} & 0 < w < 1 \\ 1 & w \ge 1 \end{cases} \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 0 & w \le 0 \\ 1 & w > 0 \end{cases} = F_{Deg(0)}(w)$$