Prova scritta di Calcolo delle Probabilità

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Docente: Prof. Enzo Orsingher

4 Febbraio 2018

Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Esercizio 1.

Tre amici vanno in birreria e mettono sul divano i cappelli in modo confuso. Dopo aver bevuto ognuno prende a caso un cappello e si chiede

(i) con quale probabilità tutti prendono il proprio cappello.

(ii) con quale probabilità almeno uno prende il proprio cappello;

(iii) con quale probabilità nessuno prende il proprio cappello;

(iv) Tornando a casa (i tre amici abitano nello stesso palazzo) incontrano altre tre persone ugualmente alticce. Prendendo l'ascensore a caso (il palazzo ha tre piani) con quale probabilità ad ogni piano scende almeno una persona?

Soluzione.

Sia A_i l'evento "l'amico $i-$mo prende il proprio cappello".

(i)

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

(ii)

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \sum_{j=1}^{3} P(A_j) - \sum_{1 \leq i < j \leq 3} P(A_i \cap A_j) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{3 \cdot 2}{3!} - \frac{3 \cdot 1}{3!} + \frac{1}{3!} = \frac{2}{3}$$

(iii)

$$P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \frac{1}{3}$$

(iv)

$$P(\text{“scende almeno una persona ad ogni piano”}) = \frac{\binom{3+3-1}{3-1}}{\binom{6+3-1}{3-1}} = \frac{5}{14}$$

Esercizio 2.

Siano X_1 ed X_2 due variabili indipendenti ed identicamente distribuite con legge $Unif(0,2)$.

(i) Trovare la funzione di ripartizione e la densità di $W = X_1X_2$.

(ii) Calcolare il valore atteso di W utilizzando esplicitamente la funzione di densità.

Soluzione.

(i) Si ha che $W \in (0,4)$ q.c.. Per $0 < w < 4$

$$
\begin{aligned}
F_W(w) = P(W < w) = P(X_1X_2 < w) &= 1 - \int_{\frac{w}{2}}^{2} dx_1 \int_{\frac{w}{x_1}}^{2} \frac{dx_2}{4} \\
&= 1 - \frac{1}{4}\int_{\frac{w}{2}}^{2} \left(2 - \frac{w}{x_1}\right) dx_1 = 1 - \frac{1}{2}\left(2 - \frac{w}{2}\right) + \frac{w}{4}\left(\ln 2 - \ln \frac{w}{2}\right) \\
&= \frac{w}{4} + \frac{w}{4}\left(\ln 2 - \ln \frac{w}{2}\right) .
\end{aligned}
$$

La densità di W è data da

$$
f_W(w) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(\ln 2 - \ln \frac{w}{2}\right) & 0 < w < 4 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}W = \frac{1}{2}\int_0^4 w\left(\ln 2 - \ln \frac{w}{2}\right) dw &= \frac{1}{2}\left(\ln 2 \frac{4^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_0^4 w \ln w \, dw \\
&= 4\ln 2 - \frac{1}{4}\left[\frac{4^2}{2}\ln 4 - \frac{1}{4\cdot 2}\frac{1}{2}\cdot 4^2\right] = 1
\end{aligned}
$$

Esercizio 3.

(i) Siano $X_1, X_2, \ldots$ variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite, le quali assumono i valori 1 e -1 con probabilità p e q rispettivamente. Sia

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{n^\alpha} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Studiare il limite in distribuzione di Y_n per $\alpha = 1$ e $\alpha = 1/2$, ponendo nel secondo caso $p = 1/2$.

(ii) Studiare la convergenza di Y_n quando le $X_k \sim Cauchy(0,1)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione.

(i) Usando la f.c.

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{E}e^{it\frac{X}{n^\alpha}}\right)^n &= \left(pe^{\frac{it}{n^\alpha}} + (1-p)e^{-\frac{it}{n^\alpha}}\right)^n \\ &= p\left(1 + \frac{it}{n^\alpha} + \frac{1}{2}\left(\frac{it}{n^\alpha}\right)^2 + \ldots\right) + (1-p)\left(1 - \frac{it}{n^\alpha} + \frac{1}{2}\left(\frac{-it}{n^\alpha}\right)^2 + \ldots\right) \\ &= \left(1 + (2p-1)\frac{it}{n^\alpha} - \frac{t^2}{n^{2\alpha}}(2p-1) + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right)^n\end{aligned}$$

Perciò

$$\lim_{n\to\infty}\left(\mathbb{E}e^{it\frac{X}{n^\alpha}}\right)^n \begin{cases} e^{(2p-1)it} & \alpha = 1 \\ e^{-t^2/2} & \alpha = 1/2,\ p = 1/2 \end{cases}$$

(ii)

$$\left(\mathbb{E}e^{it\frac{X}{n^\alpha}}\right)^n = e^{-\frac{|t|}{n^\alpha}n} = e^{-|t|n^{1-\alpha}} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 0 & \text{(non converge)} & \alpha < 1 \\ e^{-|t|} & (Cauchy) & \alpha = 1 \\ 1 & (Deg(0)) & \alpha > 1 \end{cases}$$