Prova scritta di Calcolo delle Probabilità
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica
Docente: Prof. Enzo Orsingher
1 Aprile 2019

Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Esercizio 1.

Supponiamo di avere due urne con la seguente composizione:

l'urna U_1 ha 2 palline rosse e 3 verdi;

l'urna U_2 ha 3 palline rosse e 2 verdi.

(i) Dall'urna U_1 è trasferita in U_2 una coppia di palline di cui non si conosce il colore. Da U_2 si estrae una pallina a caso, che risulta verde. Calcolare la probabilità che le due palline trasferite da U_1 a U_2 siano entrambe verdi.

(ii) Si consideri il caso in cui si trasferiscono due palline a caso da U_2 in U_1, e si estrae una pallina da U_1 che risulta verde. Calcolare la probabilità che le due palline trasferite da U_2 a U_1 siano entrambe verdi.

Soluzione. Introduciamo gli eventi V^1 e V^2 per indicare che si è estratta una pallina verde da U_1 e U_2. Analogamente indichiamo con R^1 e R^2 gli eventi in cui si estrae una pallina rossa da U_1 e U_2.

(i) Applicando la formula di Bayes abbiamo

$$P(2V^1|V^2) = \frac{P(V^2|2V^1)P(2V^1)}{P(V^2|2V^1)P(2V^1) + P(V^2|R^1 \cap V^1)P(R^1 \cap V^1) + P(V^2|2R^1)P(2R^1)}$$

$$= \frac{\frac{4}{7}\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}}{\frac{4}{7}\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} + \frac{3}{7}\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} + \frac{2}{7}\frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}} = \frac{3}{8}\,.$$

(ii) In questo caso si ha

$$P(2V^2|V^1) = \frac{P(V^1|2V^2)P(2V^2)}{P(V^1|2V^2)P(2V^2) + P(V^1|R^2 \cap V^2)P(R^2 \cap V^2) + P(V^1|2R^2)P(2R^2)}$$

$$= \frac{\frac{5}{7}\frac{\binom{2}{2}}{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{7}\frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} + \frac{4}{7}\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} + \frac{3}{7}\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}} = \frac{5}{38}\,.$$

Esercizio 2.

Sia X una v.a. con distribuzione di $Cauchy(0,1)$. Siano $a, b > 0$.

(i) Calcolare la distribuzione di $\frac{a}{b+X}$.

(ii) Determinare quale valore di c vale l'uguaglianza in distribuzione

$$\frac{a}{b+X} = \frac{a}{b+\frac{c}{X}}.$$

Soluzione.

(i)

$$P(\frac{a}{b+\frac{c}{X}} < w) = \int_{\{x: \frac{a}{b+x} < w\}} f(x)dx = \int_{\{x: x > \frac{a-wb}{w}\}} f(x)dx$$

Se $w < 0$

$$\int_{\frac{a}{w}-b}^{-b} \frac{dx}{\pi(1+x^2)} = \frac{1}{\pi}\arctan(-b) - \frac{1}{\pi}\arctan(\frac{a}{w} - b)$$

Se $w > 0$

$$\begin{aligned} P(\frac{a}{b+\frac{c}{X}} < w) &= \int_{-\infty}^{-b} f(x)dx + \int_{\frac{a}{w}-b}^{\infty} f(x)dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arctan b + \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arctan(\frac{a}{w} - b) \end{aligned}$$

La densità associata è

$$f(w) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{a}{(a-bw)^2 + w^2}\right] = \frac{1}{\pi}\frac{\frac{a}{1+b^2}}{\left(w - \frac{ab}{1+b^2}\right)^2 + \frac{a^2}{(1+b^2)^2}}$$

e quindi è la densità di una Cauchy di parametri $\frac{ab}{1+b^2}$ (posizione) e $\frac{a}{1+b^2}$ (scala).

(ii) Essendo $X \stackrel{d}{=} 1/X$ basta porre $c = 1$.

Esercizio 3.

Siano $X_1, X_2, \ldots$ v.a. indipendenti ed identicamente distribuite con legge $Unif[0,1]$.

(i) Studiare la convergenza di

$$Y_n = \prod_{i=1}^{n} X_i \quad n \geq 1.$$

(ii) Mostrare che se le variabili X_i sono $Unif(1,2)$ la successione non converge in media quadratica.

Soluzione.

(i) Siccome le X_j sono comprese tra 0 e 1 il loro prodotto tende a zero. Per verificarlo consideriamo la convergenza in media quadratica.

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = \left(\mathbb{E}X_i^2\right)^n = \left(\int_0^1 x^2\,dx\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

(ii) In questo caso

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = \left(\mathbb{E}X_i^2\right)^n = \left(\int_1^2 x^2\,dx\right)^n = \left(\frac{7}{3}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$