Prova scritta di Calcolo delle Probabilità
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica
Docente: Prof. Enzo Orsingher
Giugno 2019

Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Esercizio 1.

Siano date n lampadine con durata aleatoria T avente distribuzione $P(T > t) = e^{-\lambda t}$

(i) Con quale probabilità al tempo t le lampadine sono ancora in funzione?

(ii) Con quale probabilità tutte le lampadine sono rotte?

(iii) Con quale probabilità se al tempo t erano in funzione k lampadine al tempo $s < t$ ve n'erano in funzione r ? (Si supponga che le lampadine si spengono in intervallo di tempo disgiunti in modo indipendente).

Soluzione.

(i) Supponendo che le durate delle lampadine siano indipendenti tra di loro la probabilità di ottenere k successi, cioè che il numero N di lampadine accese sia pari a k, è data dalla legge binomiale:

$$P(N = k) = \binom{n}{k}(e^{-\lambda t})^k(1 - e^{-\lambda t})^{n-k} \qquad k = 0, 1, \dots, n$$

(ii)

$$P(N = 0) = (1 - e^{-\lambda t})^n$$

(iii) Sia N_s il numero di lampadine accese al tempo t, N_s il numero di lampadine accese al tempo s ed N_{t-s} il numero di lampadine accese in un intervallo N_{t-s}.

$$\begin{aligned}
P(N_s = r | N_t = k) &= \frac{P(N_s = r, N_t = k)}{P(N_t = k)} = \frac{P(N_t = k | N_s = r)P(N_s = r)}{P(N_t = k)} \\
&= \frac{P(k \text{ delle } r \text{ lampadine si spengono nell'intervallo } (s,t])P(N_s = r)}{P(N_t = k)} \\
&= \frac{\binom{n}{r}e^{-\lambda s r}(1 - e^{-\lambda s})^{n-r}\binom{r}{k}e^{-\lambda(t-s)k}(1 - e^{-\lambda(t-s)})^{r-k}}{\binom{n}{k}e^{-\lambda t k}(1 - e^{-\lambda t})^{n-k}}
\end{aligned}$$

Esercizio 2.

Siano X_1, X_2 ed X_3 tre variabili indipendenti con funzione di ripartizione F.

(i) Trovare la distribuzione di

$$X_{(1)} = \min(X_1, X_2, X_3) \qquad X_{(3)} = \max(X_1, X_2, X_3) \qquad X_{(2)} = \text{la seconda più grande tra le tre v.a.}$$

ovvero $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq X_{(3)}$.

(ii) Esplicitare le distribuzioni delle $X_{(i)}$ nel caso in cui $X_i \sim Unif(0,1)$ $i = 1, 2, 3$, e calcolarne il valore atteso.

Soluzione.

(i)

$$F_{X_{(1)}}(x) = P(X_{(1)} < x) = 1 - (1 - F(x))^3 \qquad F_{X_{(3)}}(x) = P(X_{(3)} < x) = (F(x))^3$$

$$\begin{aligned} F_{X_{(2)}}(x) = P(X_{(2)} < x) &= \sum_{j=2}^{3} \binom{3}{j} F^j(x)(1 - F(x))^{3-j} \\ &= \binom{3}{2} F^2(x)(1 - F(x)) + F^3(x) = 3F^2(x)(1 - F(x)) + F^3(x) \\ &= 3F^2(x) - 2F^3(x) \end{aligned}$$

(ii)

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - (1 - x)^3\,, \qquad F_{X_{(3)}}(x) = x^3\,, \qquad F_{X_{(2)}}(x) = 3x^2 - 2x^3\,, \qquad 0 < x < 1.$$

$$\mathbb{E}X_{(1)} = 3\int_0^1 x(1 - x^2)dx = 3\frac{\Gamma(2)\Gamma(3)}{\Gamma(5)} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{E}X_{(3)} = 3\int_0^1 x \cdot x^2 dx = \frac{3}{4}$$

$$\mathbb{E}X_{(2)} = 6\int_0^1 x(x - x^2)dx = 6(1/3 - 1/4) = \frac{1}{2}$$

Si verifica che $\mathbb{E}X_{(1)} \leq \mathbb{E}X_{(2)} \leq \mathbb{E}X_{(3)}$.

Esercizio 3.

Siano $\{X_k, k \geq 1\}$ v.a. indipendenti con distribuzione di Cauchy e con funzione caratteristica $e^{-|t|/k^\alpha}$.

(i) Trovare la f.c. di $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

(ii) Trovare il limite in distribuzione di S_n per $n \to \infty$ ed $\alpha > 1$.

Soluzione.

(i)

$$\mathbb{E}e^{itS_n} = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}e^{itX_k} = e^{|t| \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}}$$

(ii) Siccome

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}e^{itS_n} = e^{|t| \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha}}$$

il limite in distribuzione di S_n è una $Cauchy(0, \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha})$ (per $\alpha = 2$ la distribuzione limite è $Cauchy(0, \pi^2/6)$).