Prova scritta di Calcolo delle Probabilità
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica
Docente: Prof. Enzo Orsingher
3 Settembre 2019

Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Esercizio 1.

Sia T il tempo aleatorio prima che un ciclista sia investito da un'automobile.

Siano n i ciclisti che vivono in un paese. Calcolare

(i) la probabilità che al tempo t nessuno dei ciclisti sia stato investito;

(ii) la probabilità che almeno un ciclista sia stato investito;

(iii) la probabilità che $1 < k < n$ ciclisti siano stati investiti al tempo t;

(iv) la probabilità che tutti i ciclisti siano stati investiti.

(v) A quale istante la probabilità che nessuno sia stato investito e tutti siano stati investiti è uguale?

Si suppone che i tempi $T_k, 1 \leq k \leq n$ sono indipendenti e con la stessa distribuzione di T. Si esplicitino le probabilità date assumendo che T sia distribuita esponenzialmente con parametro $\lambda = 1$.

Soluzione.

(i) Sia N il numero di ciclisti investiti.

$$P(N = 0) = P(\bigcap_{k=1}^{n} T_k > t) = \prod_{k=1}^{n} P(T_k > t) = e^{-nt}$$

(ii)

$$P(N \geq 1) = 1 - P(N = 0) = 1 - e^{-nt}$$

(iii)

$$P(N = k) = \binom{n}{k} P(T \leq t)^k P(T > t)^{n-k} = \binom{n}{k} (1 - e^{-t})^k e^{-(n-k)t}$$

(iv)

$$P(N = n) = P(\bigcap_{k=1}^{n} T_k \leq t) = \prod_{k=1}^{n} P(T_k \leq t) = (1 - e^{-t})^n$$

(v)

$$e^{-nt} = (1 - e^{-t})^n \Rightarrow t = \ln 2$$

Esercizio 2.

Siano X_1 e X_2 due v.a. normali standardizzate indipendenti. Trovare la distribuzione di

(i) $W = X_1^2 + X_2^2$;

(ii) $Z = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$.

(iii) Calcolare $\mathbb{E}Z$ ed $\mathbb{E}W$.

Soluzione.

(i)

$$F_W(w) = P(X_1^2 + X_2^2 < w) = \int_{\{x_1,x_2:x_1^2+_2^2<w\}} \frac{e^{-\frac{x_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{x_2^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2$$

$$= \int_0^{\sqrt{w}} \rho \,\mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\rho^2/2}}{2\pi} = 1 - e^{-w/2} \qquad w > 0$$

(ii)

$$F_Z(z) = P(X_1^2 + X_2^2 < z^2) = \int_0^{z} \rho \,\mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\rho^2/2}}{2\pi} = 1 - e^{-z^2/2} \qquad z > 0$$

(iii) $\mathbb{E}W = 2$ poiché $W \sim Exp(1/2)$.

$$\mathbb{E}Z = \mathbb{E}\sqrt{W} = \int_0^{\infty} w^{1/2} \frac{1}{2} e^{-w/2} \,\mathrm{d}w = \sqrt{2} \int_0^{\infty} w^{3/2-1} e^{-w} \,\mathrm{d}w = \sqrt{2}\,\Gamma(3/2) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Esercizio 3.

Siano $X_j, 1 \leq j \leq n$ v.a. indipendenti e uniformi in $[0,1]$.

(i) Si trovi la distribuzione congiunta di $U_n = \min_{1\leq j\leq n} X_j$, $V_n = \max_{1\leq j\leq n} X_j$.

(ii) Calcolare la densità congiunta.

(iii) Trovare la distribuzione di $W_n = \max_{1\leq j\leq n} X_j - \min_{1\leq j\leq n} X_j$.

(iv) Trovare il limite in distribuzione di U_n, V_n, W_n.

Soluzione.

(i)

$$P\left(\max_{1\leq j\leq n} X_j < v, \min_{1\leq j\leq n} X_j > u\right) = P\left(\bigcap_{j=1}^{n} P(u < X_j < v)\right) = (v-u)^n \qquad 0 < u < v < 1.$$

(ii)

$$f_{U_n,V_n} = -\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} n(n-1)(v-u)^{n-2} \qquad 0 < u < v < 1.$$

(iii)

$$\begin{aligned} F_{W_n}(w) &= 1 - \int_0^{1-w} \mathrm{d}u \int_{u+w}^{1} n(n-1)(v-u)^{n-2} \mathrm{d}v \\ &= 1 + \int_0^{1-w} (-n(1-u)^{n-1} + nw^{n-1}) \mathrm{d}u \\ &= w^n + nw^{n-1}(1-w) \qquad 0 < w < 1. \end{aligned}$$

(iv) Per $n \to \infty$, $U_n \xrightarrow{d} 0$, $V_n \xrightarrow{d} 1$, $W_n \xrightarrow{d} 1$.