Prova scritta di Calcolo delle Probabilità
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica
Docente: Prof. Enzo Orsingher
7 Ottobre 2019

Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Esercizio 1.

Abbiamo 3 dadi regolari. Supponiamo di lanciarli simultaneamente.

(i) Calcolare la probabilità che i tre numeri siano diversi.

(ii) Trovare la probabilità che esattamente due facce siano uguali.

(iii) Trovare la probabilità che almeno due facce siano uguali.

(iv) Trovare la probabilità che la somma dei tre numeri sia maggiore di 5.

Soluzione.

(i)

$$p_1 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{5}{9}$$

(ii)

$$p_2 = \frac{\binom{3}{2} 6 \cdot 5}{6^3} = \frac{5}{12}$$

(iii)

$$p_3 = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} = \frac{\binom{3}{2} 6 \cdot 5}{6^3} + \frac{6}{6^3}$$

(iv)

$$p_4 = 1 - P(\text{somma} \leq 5) = 1 - \frac{10}{6^3}$$

Esercizio 2.

Sia data una variabile normale standardizzata X con densità

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

(i) Trovare la probabilità che $P(|X| > 1)$.

(ii) Se X, Y sono due v.a. normali standardizzate indipendenti trovare $P(\sqrt{X^2 + Y^2} > 1)$.

(iii) Trovare la probabilità $P(|X| < 1, |Y| < 1)$.

(iv) Se X, Y sono due v.a. di Cauchy indipendenti calcolare $P(|X| < 1, |Y| < 1)$.

Soluzione.

(i)

$$P(|X| > 1) = 2 \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x$$

(ii)

$$P(\sqrt{X^2 + y^2} > 1) = \iint_{\{x,y: x^2+y^2>1\}} \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}{2\pi} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^\infty \rho e^{-\frac{\rho^2}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = e^{-\frac{1}{2}}$$

(iii)

$$P(|X| < 1, |Y| < 1) = [P(|X| < 1)]^2 = \left[\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x\right]^2$$

(iv)

$$P(|X| < 1, |Y| < 1) = \left[\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\pi(1 + x^2)}\right]^2 = \left[\frac{2}{\pi} \arctan 1\right]^2 = \left[\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4}\right]^2 = \frac{1}{4}$$

Esercizio 3.

Sia (X, Y) una v.a. uniforme in un cerchio di raggio 1.

(i) Calcolare $P((X,Y) \in C_{\frac{1}{2},1})$, dove

$$C_{\frac{1}{2},1} = \left\{ x, y : \frac{1}{2} < \sqrt{x^2 + y^2} < 1 \right\}$$

(ii) Calcolare $P(X > 1/2)$.

(iii) Calcolare $P((X,Y) \in T)$ dove

$$T = \{x, y : x > 0, 0 < y < x\}$$

Soluzione.

(i)

$$P((X,Y) \in C_{\frac{1}{2},1}) = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\text{area corona di raggi } \frac{1}{2}, 1 \right) = \frac{\pi - \pi \frac{1}{2^2}}{\pi} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
P(X > 1/2) &= \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1 - x^2} \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi} \int_{\arcsin \frac{1}{2}}^{\arcsin 1} \cos^2 \theta \mathrm{d}\theta = \frac{2}{\pi} \int_{\arcsin \frac{1}{2}}^{\arcsin 1} \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2} \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2^2} \frac{2}{\pi} \sin 2\theta \Big|_{\arcsin \frac{1}{2}}^{\arcsin 1} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{\pi} \sin \theta \cos \theta \Big|_{\arcsin \frac{1}{2}}^{\arcsin 1} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}
\end{aligned}$$

(iii)

$$P((X,Y) \in T) = \frac{1}{\pi} Area(T) = \frac{1}{8}.$$